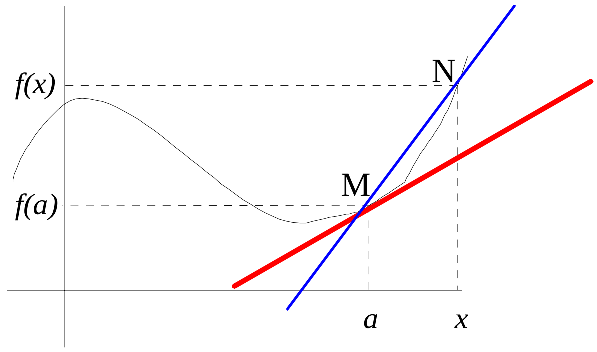
Dérivées

Dans cette partie, la fonction f est définie sur un intervalle contenant le nombre réel $\boldsymbol{a}$.

Def 1 : f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

Interprétation géométrique :

On considère les points de la courbe représentative $\mathrm{M}(a; f(a))$ et $\mathrm{N}(x; f(x))$.



La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente le coefficient directeur de la sécante (MN).

La limite indiquée dans la **Def 1** signifie que lorsque N se rapproche de M, le coefficient directeur de la droite (MN) tend vers A.

On admet alors que la droite passant par M et de coefficient directeur A est tangente à la courbe en M.

Def 2 : f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

Rem : A est un nombre fini et s'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.
Ce nombre est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Prop : Toute fonction dérivable en a est continue en a .

Def 3 : f est dérivable en a si et seulement si on peut trouver un réel A et une fonction ε tels que
$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

commentaire : Il suffit de prendre dans la **Def 2** $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - A$

Ex : la fonction logarithme Népérien est dérivable en 1 et l'on a $\ln'(1) = 1$, donc

$\ln(1+h) = \ln 1 + h\ln'(1) + h\varepsilon(h)$ c'est à dire $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$

alors " pour h très petit " $\ln(1+h) \approx h$

On peut ainsi écrire : $\ln(1{,}003) \approx 0{,}003$; $\ln(0{,}9998) \approx -0{,}0002$

On obtient ici les approximations à l'ordre 1.
On parle aussi de développement limité à l'ordre 1. (Voir plus loin les dev. lim)

Ex : $(1+h)^{\alpha} \approx 1 + \alpha.h \quad (\alpha \in \mathrm{R}^*)$ $\qquad e^h \approx 1 + h \qquad \sinh \approx h$

Prop : Une fonction est dérivable sur un intervalle si et seulement si elle est dérivable pour tout réel de cet intervalle.

Exemples :

- ☞ Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$
- ☞ Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- ☞ Les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$
- ☞ Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et logarithme népérien sont dérivables sur $\mathbb{R}\times^{+}$
- ☞ La fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{R})$ est dérivable sur $\mathbb{R}\times^{+}$
- ☞ La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathrm{Z} \}$.

Dérivées des fonctions usuelles

Ensemble de définition	Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$\mathbb{R}$	k (constante)	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathrm{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}\times$	$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathrm{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\times$
$\mathbb{R}^{+}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}\times$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathrm{Z} \}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathrm{Z} \}$
$\mathbb{R}\times^{+}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\times^{+}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}\times^{+}$	x^{α} $(\alpha \in \mathrm{R}^*)$	$\alpha . x^{\alpha - 1}$	$\mathbb{R}\times^{+}$

<u>**Opérations sur les fonctions dérivables**</u>

Si u et v sont dérivables sur I alors
- $k.u$ est dérivable sur I et $(k.u)' = k.u'$.
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- $u.v$ est dérivable sur I et $(u.v)' = u'.v + u.v'$.

Si en plus v est non nulle sur I alors
- $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Si $ax + b \in$ I alors $x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur I et $[u(ax+b)]' = a.u'(ax+b)$.

Ex :

$f(ax+b)$	a pour dérivée	$af'(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	a pour dérivée	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	a pour dérivée	$-a\sin(ax+b)$

Prop : Dérivée d'une fonction composée

$$\begin{array}{lccccc} f\circ u: & I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K \\ & x & \longrightarrow & u(x) & \longrightarrow & f(u(x)) \\ & & & X & \longrightarrow & f(X) \\ (f\circ u)': & & u'(x) & & \times & f'(X) \end{array}$$

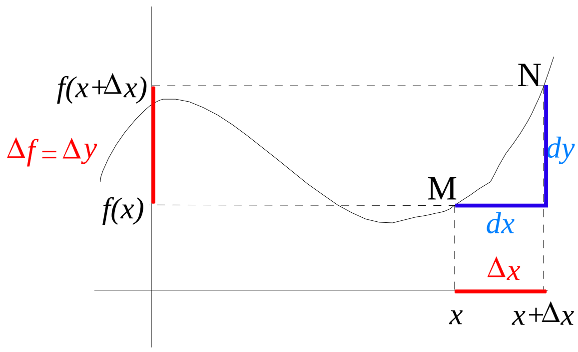
$$\boxed{(f\circ u)'(x)=u'(x).f'(u(x))}$$

Ex : $\left(e^{u}\right)'=u'.e^{u}$ $\qquad (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ $\qquad \left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$

Variations d'une fonction dérivable sur I

f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I.
f est strictement décroissante sur I si et seulement si f' est strictement négative sur I.
f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Notation différentielle :



On remplace a par x.
Le point fixe est donc $M(x;f(x))$.

Si on pose $h=\Delta x$, accroissement de la variable,
correspondant à $\Delta f=\Delta y$
alors le point variable devient $N(x+\Delta x;f(x+\Delta x))$.

On a $\Delta f=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

La **Def 2** s'écrit alors $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ ou encore $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$.

On écrira $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ ou encore $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}y$. On peut aussi écrire $df = f'(x).dx$

Utilisation pour un calcul de valeur approchée :

Pour Δx assez petit, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$ permet de dire que $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ représente une valeur approchée de $f'(x)$

donc $\Delta f\approx f'(x).\Delta x$ ou encore $\Delta f\approx df$ avec $dx=\Delta x$.

Ex : L'aire d'un disque de rayon R est A = πR^2. Déterminons pour R = 2 cm une valeur approchée de la variation ΔA de l'aire du disque lorsque le rayon varie de ΔR = 0,1 cm.

A = πR^2 donc dA = $2\pi R.dR\approx 2\pi\times 2\times 0{,}1\approx 1{,}26$; donc $\Delta A\approx 1{,}26$ cm^2
Lorsque le rayon varie de 0,1 cm , l'aire varie d'environ 1,26 cm^2.