Fonction réciproque

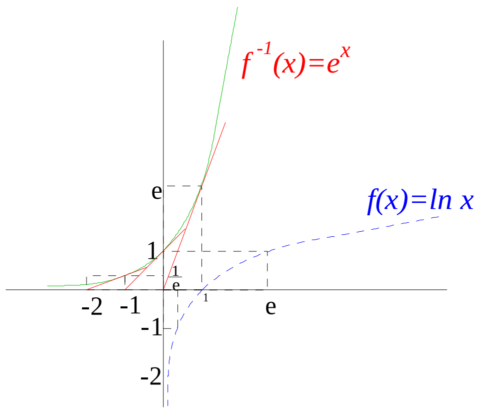
1. DEFINITION, EXEMPLES

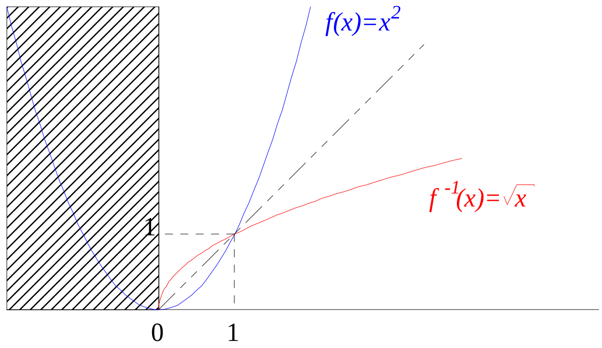
Th : Toute fonction f définie sur un intervalle I, continue et strictement monotone sur cet intervalle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle image J.

Conséquences :

1. Tout nombre réel de l'intervalle J admet un unique antécédent dans I par la fonction f.
2. La fonction f admet une fonction réciproque définie sur J et notée f^{-1}.

Ex : Logarithme et exponentielle — Carré et racine carrée





Prop : Si f est définie, strictement monotone et dérivable sur I alors f admet une fonction réciproque dérivable sur $J=f(I)$ et $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

Ex : $f(x)=x^2$ donc $\begin{cases} f'(x)=2x \\ f^{-1}(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ on peut alors écrire $f'\left(f^{-1}(x)\right)=2f^{-1}(x)=2\sqrt{x}$ d'où $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

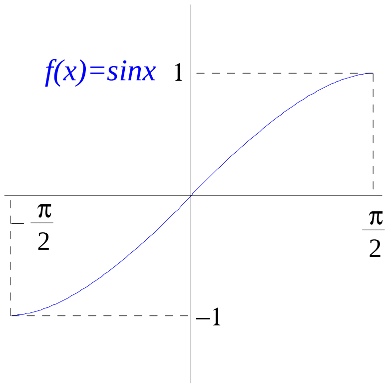
$f(x)=\ln x$ donc $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ f^{-1}(x)=e^x \end{cases}$ on peut alors écrire $f'\left(f^{-1}(x)\right)=\dfrac{1}{f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{e^x}$ d'où $\left(e^x\right)'=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}}=e^x$

2. FONCTIONS RECIPROQUES DES FONCTIONS USUELLES

2.1 Fonction " arcsinus "

La fonction $f(x)=\sin x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

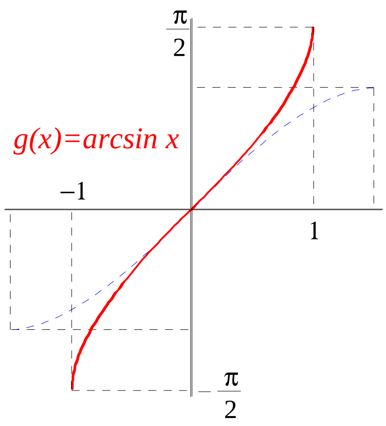
Pour obtenir une fonction strictement monotone on se place sur l'intervalle $I=\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]$.



Def : La fonction réciproque de la fonction sinus est la fonction arcsinus définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par : $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

Prop : La fonction $g(x) = \arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; 1[$

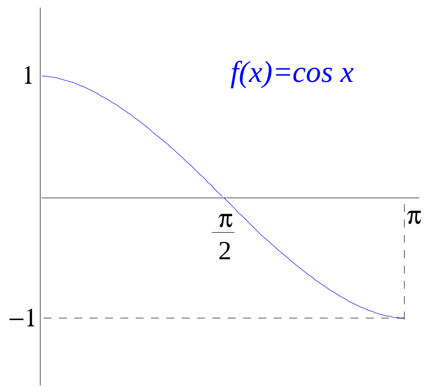
de dérivée $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



2.2 Fonction " arccosinus "

La fonction $f(x) = \cos x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

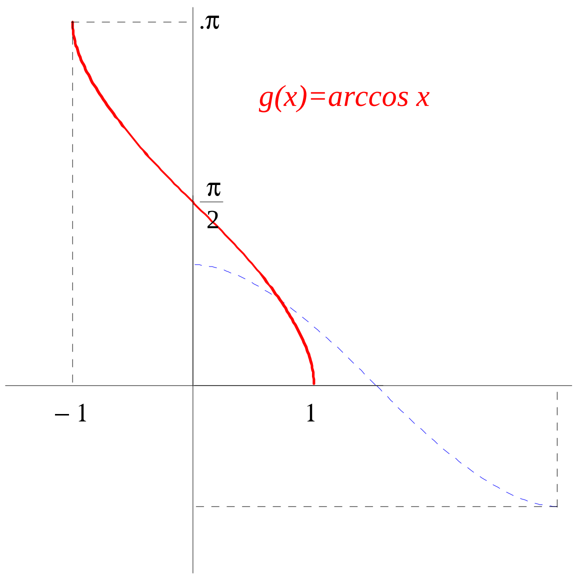
Pour obtenir une fonction strictement monotone on se place sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0; \pi]$.



Def : La fonction réciproque de la fonction cosinus est la fonction arccosinus définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par : $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

Prop : La fonction $g(x) = \arccos x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; 1[$

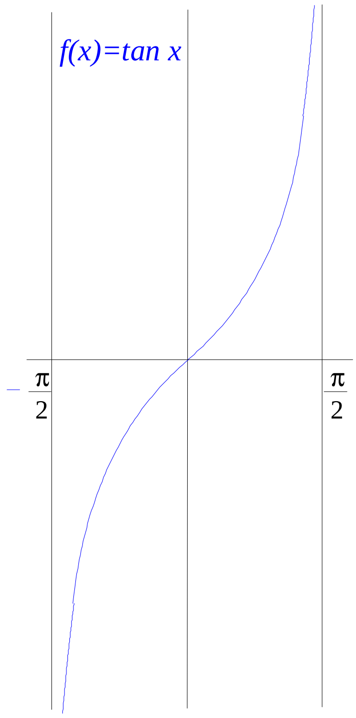
de dérivée $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$



2.3 Fonction " arctangente "

La fonction $f(x) = \tan x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. .

Pour obtenir une fonction strictement monotone on se place sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$



Def : La fonction réciproque de la fonction tangente est la fonction arctangente définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

Prop : La fonction $g(x) = \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$