Calcul différentiel et intégral

1. PRIMITIVES

1.1 Rappel

Def : F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si
F est dérivable sur I et si, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Th : (Théorème d'existence) Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Prop : Si F est une primitive de f alors, toute primitive de f peut s 'écrire sous la forme $F + k$, où k est une constante réelle

1.2 Primitives des fonctions usuelles

Voir tableaux en annexe.

2. INTEGRALES

2.1 Rappel

Def : Si la fonction f est continue sur I , la quantité $F(b)-F(a)$ est indépendante de la primitive F de f choisie. On l'appelle l'intégrale de f prise entre les valeurs a et b et on la note $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit *" Somme de a à b de f(x)dx "*.

Notation : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

On peut aussi écrire $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

Prop : La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ représente la primitive de la fonction $x \mapsto f(x)$ qui s'annule pour la valeur $x = a$.

2.2 Propriétés

Calculs

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ **(Relation de Chasles)**

$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ **(Linéarité)**

$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Si $a \le b$ et $f \ge 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ **(Positivité)**

Intégration d'une inégalité : Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \le g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Inégalités de la moyenne :

1. Si $m \le f \le M$ et $a \le b$ alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

2. Si $|f| \le k$ et $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k|b-a|$

Valeur moyenne d'une fonction : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ alors on appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ la quantité $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

3. METHODES DE CALCUL

Met 1 : Utilisation directe des formules connues.

Met 2 : Décomposition d'un fonction rationnelle en éléments simples.

Met 3 : Linéarisation de polynômes trigonométriques.(Formules d'Euler)

Met 4 : Intégration par parties.

Met 5 : Changement de variable.

Intégration par parties :

Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$ alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Changement de variable : (Application de la formule de dérivée d'une fonction composée)

Si $x = \varphi(t)$ et φ est dérivable, φ' continue, on pose $dx = \varphi'(t)dt$

alors $\int_a^b f(t)dt = \int_u^v f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$ avec $a = \varphi(u)$ et $b = \varphi(v)$