Développements limités Majorations Tayloriennes

1 OBJECTIFS

On étudie le comportement au "voisinage de 0" d'une fonction (voir activité annexe).
Pour cela on va remplacer la fonction par une fonction polynôme la meilleure possible.

2 MAJORATIONS TAYLORIENNES

1ère approche: Dérivabilité en *a*.

f est définie sur I contenant *a*. *f* est dérivable en $a \in$ R si et seulement si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A \text{ ou } \lim_{x \to +a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \text{.}$$

Conséquence $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - A$

ou $f(x+a) = f(a) + Ax + x\varepsilon(x)$

Pour x voisin de 0 $f(x+a) \approx Ax+b$ avec b = $f(a)$. Localement on peut remplacer f par une fonction affine.

Exemples usuels:

$\ln(1+x) \approx x$ pour x voisin de 0

$e^h \approx 1+h$ pour h voisin de 0

$\sin t \approx t$ pour t voisin de 0

$\sqrt{1+t} \approx 1+\dfrac{t}{2}$ pour t voisin de 0.

mais dès que la variable s'éloigne de 0, l'approximation devient fausse d'où l'idée de chercher à améliorer le procédé et d'avoir une idée sur l'erreur commise.

2ème approche: Théorème des accroissements finis

fonction à dérivée première bornée :

Si f est dérivable sur I et f ' est bornée sur I. (pour tout x de ; $|f'(x)| < M$)
alors si $x \in$ I et $a \in$ I on a $|f(x) - f(a)| \le M|x-a|$

fonction à dérivée seconde bornée :

Si f est deux fois dérivable sur I et f '' est bornée sur I .(Pour tout x de I $|f''(x)| < M$)

alors si $x \in$ I et $a \in$ I $|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \le M\dfrac{(x-a)^2}{2}$

Retour sur les exemples usuels

$$f(x) = \ln(x) ; f'(x) = \frac{1}{x} ; f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

sur [0,9;1,1] : $\dfrac{1}{1{,}1^2} < |f''(x)| < \dfrac{1}{0{,}9^2} ; |f''(x)| \le 1{,}25$; $\quad M\dfrac{(x-a)^2}{2} \approx 0{,}061 < 0{,}07$

$\ln(1+x) \approx x$ avec une erreur inférieure à 7%

$3^{ème}$ approche pour aller plus loin: fonction à dérivée d'ordre n+1 bornée

f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n + 1, $f'(t)=\frac{d}{dt}f(t);\ \ ...;\ f^{(n+1)}(t)=\frac{d^{n+1}}{dt^n}f(t)$ sur I

et $f^{(n+1)}$ est bornée sur I (pour tout x de I $\left|f^{n+1}(x)\right|<M$)

alors $\left|f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)-...-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right|\leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

appelée inégalité de Taylor ou majoration Taylorienne.

3 DEVELOPPEMENTS LIMITES

3.1 fonction exponentielle $f'x)=e^x;\ \ f'(x)=e^x;\ \ f^{(n)}(x)=e^x$ sur [–1; 1]

L'exponentielle est croissante, on a $e^{-1}<e^x<e^1<3$ donc

$$\left|f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{2}f''(0)\right|<e\frac{\left|x^3\right|}{6}.$$

On peut écrire $\frac{\left|e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right|}{x^2}=e\frac{|x|}{6}$ avec $\lim_{x\to+0}e\frac{|x|}{6}=0$ d'où

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2}=x^2\varepsilon(x)\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

ou $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$ développement limité d'ordre 2.

On démontre de même que pour tout n $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$

3.2 Développements limités usuels (voir formulaire)

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

$$\ln(t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+...+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+...+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+...+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

$$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1).....(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)\quad \text{avec}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

3.3 Propriétés algébriques

Def : La partie régulière du développement limité est :

$$P(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

Calcul: Si les fonctions f et g admettent à l'ordre n, au point 0, des développements limités dont les parties régulières sont P et Q alors :

1. $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est P + Q
2. $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme déduit de P × Q en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.

Autres propriétés :

1. Si f admet à l'ordre n, au point 0, un développement limité de partie régulière P,
$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ alors on a $f(ax) = P(ax) + x^n \varepsilon(x)$ et $f(x^k) = P(x^k) + x^{nk} \varepsilon(x)$

2. f admet un développement limité à l'ordre n, au point 0,
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

a) Si f est dérivable sur un intervalle contenant 0, alors
$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$

b) Si f est continue sur un intervalle contenant 0, alors
$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

4 APPLICATIONS