Equations différentielles linéaires (E. D. L.)

1. E. D. L. DU PREMIER ORDRE $a(x).y'+b(x).y=c(x)$ (L)

a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I où a ***ne s'annule pas***.

Les solutions sont les fonctions y, dérivables sur I, telles que, pour tout x de I,
$a(x).y'(x)+b(x).y(x)=c(x)$.

1.1 Cas particulier : E. D. L. H. $a(x).y'+b(x).y=0$ (H)

(Equation différentielle linéaire homogène, ou sans second membre)

Th 1 : Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $a(x).y'+b(x).y=0$ sont les fonctions définies sur I par $y(x)=C.e^{-G(x)}$ où C est une constante arbitraire et où G est une primitive sur I de la fonction $x\mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$

1.2 Cas général $a(x).y'+b(x).y=c(x)$ (L)

Th 2 : Les solutions de l'équation différentielle linéaire $a(x).y'+b(x).y=c(x)$ s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.

1.3 Méthode de variation des constantes

Meth : La solution générale de l'équation homogène $a(x).y'+b(x).y=0$ est $y(x)=C.e^{-G(x)}$.
On cherche une fonction $x\mapsto z(x)$ telle que $y_1(x)=z(x).e^{-G(x)}$ soit solution de l'équation $a(x).y'+b(x).y=c(x)$.

1.4 Solutions particulières usuelles de l'équation différentielle linéaire $y'+a.y=f(x)$ ($a\in\mathbb{R}$)

1.4.1 cas où $f(x)$ est un polynôme de degré n.
si $a=0$ alors une solution particulière est un polynôme de degré n+1.
si $a\neq 0$ alors une solution particulière est un polynôme de degré n.

1.4.2 Cas où $f(x)=p(x).e^{mx}$

On cherche une solution particulière de la forme $y(x)=z(x).e^{mx}$.
z est alors solution de l'équation $z'+(a+m).z=p(x)$ et on se ramène au problème précédent.

1.4.2 Cas où $f(x)=p(x).\sin mx$

Une solution particulière est donnée par la partie imaginaire de l'équation
$z'+a.z=p(x).e^{imx}$. On est donc ramené au problème précédent.

2. E. D. L. DU DEUXIEME ORDRE $a(x).y''+b(x).y'+c(x).y=f(x)$ (L)

Nous n'étudierons que les équations à coefficients constants $a.y''+b.y'+c.y=f(x)$ où a, b et c sont réels.

2.1 E. D. L. H. Forme générale $a.y''+b.y'+c.y=0$ (H)

Rem 1 : Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (H) alors, pour tout couple de réels $(k_1\,;k_2)$, la fonction $\varphi=k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$ est aussi une solution de (H).

Rem 2 : Si l'on trouve deux solutions φ_1 et φ_2 (non colinéaires) alors toute solution de (H) sera de la forme $\varphi=k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$.

2.1.1 Equation caractéristique

Si l'on cherche des solutions de l'équation (H) sous la forme $\varphi : x \mapsto e^{rx}$ alors on peut écrire $\varphi(x)=e^{rx}$, $\varphi'(x)=r.e^{rx}$ et $\varphi''(x)=r^2.e^{rx}$.

(H) s'écrit alors $a.r^2.e^{rx}+b.r.e^{rx}+c.e^{rx}=0$ d'où $a.r^2+b.r+c=0$

Def : L'équation $a.r^2+b.r+c=0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $a.y''+b.y'+c.y=0$

2.1.2 Résolution de l' E. D. L. H. $a.y''+b.y'+c.y=0$ (H)

$\Delta>0$: L'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2.
Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(x)=k_1.e^{r_1.x}+k_2.e^{r_2.x}$.

$\Delta=0$: L'équation caractéristique admet une racine réelle double r.
Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(x)=(k_1+k_2.x).e^{r.x}$.

$\Delta<0$: L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :
$r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$.
Les solutions de l'équation sont les fonctions $\varphi(x)=e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x+k_2\sin bx)$.

2.2 Cas général $a.y''+b.y'+c.y=f(x)$ (L)

Th 2 : Les solutions de l'équation différentielle linéaire $a.y''+b.y'+c.y=f(x)$ s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.

2.2.1 Si $f(x)$ est un polynôme de degré n alors il existe une solution particulière sous la forme d'un polynôme $p(x)$.

Si $a\neq 0;\ b\neq 0;\ c\neq 0$ alors le polynôme p est de degré n.
Si $a\neq 0;\ b\neq 0;\ c=0$ alors le polynôme p est de degré $n+1$.
Si $a\neq 0;\ b=0;\ c=0$ alors le polynôme p est de degré $n+2$.

2.2.2 Si $f(x)$ est de la forme $f(x)=M\cos\omega.x+N\sin\omega.x$ alors il existe une solution particulière sous la forme $\varphi(x)=A\cos\omega.x+B\sin\omega.x$ où A et B sont deux constantes à déterminer.

2.2.3 Si $f(x)$ est de la forme $f(x)=e^{mx}.p(x)$ où p est un polynôme et $m\in\mathbb{C}$ alors en effectuant le changement de variable $y(x)=z(x).e^{mx}$ on montre que la fonction z est solution de l'équation différentielle $a.z''+(2am+b).z'+(am^2+bm+c).z=p(x)$. On est donc ramené au cas traité au **2.2.1**.