Nombres complexes

Def : Il existe un ensemble de nombres, appelé ensemble des nombres complexes et noté Ê, vérifiant les propriétés suivantes :

1. Ê contient $\mathbb{R}$.

2. Ê contient un nombre noté ***i*** (ou parfois ***j***), vérifiant $i^2 = -1$.

3. L'addition et la multiplication ont les même propriétés de calcul dans Ê et dans $\mathbb{R}$

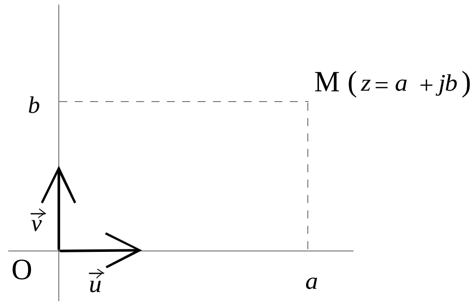
1. FORME ALGEBRIQUE

1.1 Définition, représentation géométrique

Prop : Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + j.b$, a et b étant deux réels.

a est la partie réelle de z : $a = \text{Re}(z)$

b est la partie imaginaire de z : $b = \text{Im}(z)$



Représentation géométrique

A tout nombre complexe $z = a + j.b$ est associé l'unique point M du plan de coordonnées (a; b)

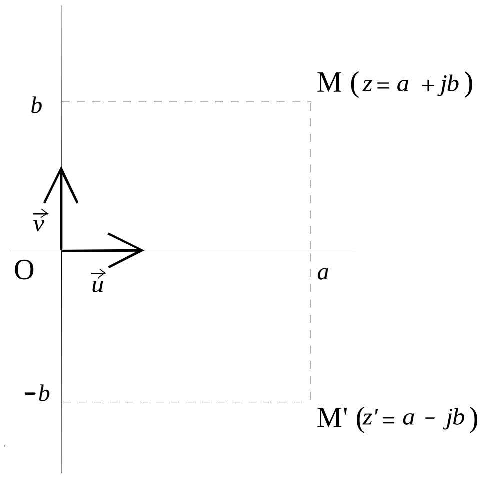
A tout vecteur du plan est associé un unique nombre complexe.

Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

1.2 Conjugué

On appelle ***conjugué*** du nombre complexe $z = a + j.b$ le nombre complexe noté $\bar{z}$, défini par $\bar{z} = a - jb$

Rem : Les points M d'affixe z et M' d'affixe z' sont symétriques autour de l'axe des abscisses.



Prop :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'; z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$a = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; \ b = \text{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

1.3 Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto Re(z)$ et $z \mapsto \text{Im}(z)$

La ligne de niveau k de la fonction $z \mapsto Re(z)$ est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\text{Re}(z) = k$. Cette ligne de niveau est la droite D_k d'équation $x = k$.

La ligne de niveau k de la fonction $z \mapsto \text{Im}(z)$ est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\text{Im}(z) = k$. Cette ligne de niveau est la droite Δ_k d'équation $y = k$.

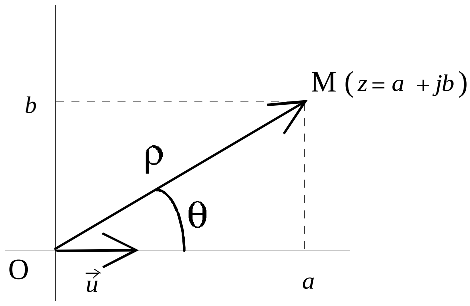
2. FORME TRIGONOMETRIQUE OU EXPONENTIELLE

2.1 Définitions

M est le point du plan dont l'affixe est le nombre complexe $z = a + j.b$.

Module : On appelle module du nombre complexe $z = a + j.b$, la quantité $\rho = |z| = \mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Prop : Si les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' alors $\mathrm{MM'} = |z' - z|$



Argument : On appelle argument du nombre complexe z une mesure θ de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Notation $\theta = \arg(z)$

Prop : $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Produit : $|z.z'| = |z|.|z'|; \arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

Quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}; \arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

2.2 Forme trigonométrique ou exponentielle : $z = \rho.e^{i\theta} = \rho.(\cos\theta + j\sin\theta)$

Produit : $z.z' = (\rho.e^{i\theta})(\rho'.e^{i\theta'}) = \rho\rho'.e^{i(\theta+\theta')}$

Quotient : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho.e^{i\theta}}{\rho'.e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}.e^{i(\theta-\theta')}$

Puissance : $z^n = (\rho.e^{i\theta})^n = \rho^n.e^{in\theta}$

2.3 Formules de MOIVRE et d' EULER

Formule de Moivre : $(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.4 Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto |z-a|$ **et** $z \mapsto \arg(z-a)$

La ligne de niveau r de la fonction $z \mapsto |z-a|$ est le cercle de centre le point A d'affixe a et de rayon r.

La ligne de niveau α de la fonction $z \mapsto \arg(z-a)$ est la demi - droite d'origine le point A d'affixe a et dont les points M vérifient $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \alpha + k.2\pi$.

3. *EQUATION DU SECOND DEGRE* ax^2+bx+c (a, b et c sont des nombres complexes)

3.1 Equation $z^2 = m$ ($m \in \mathbb{C}$)

Méthode trigonométrique :

On a $m = r.e^{j\theta}$; on pose $z = \rho.e^{j\alpha}$. Il faut alors résoudre le système $\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + k.2\pi \end{cases}$

On trouve les deux solutions $\begin{cases} z_1 = \sqrt{r}.e^{j\frac{\alpha}{2}} \\ z_2 = \sqrt{r}.e^{j(\frac{\alpha}{2}+\pi)} \end{cases}$.

Les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2 sont symétriques par rapport à l'origine du repère

Méthode algébrique :

On a $m = a + jb$; on pose $z = x + jy$. Il faut alors résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

On trouve deux solutions opposées.

3.2 Equation $ax^2+bx+c=0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions δ_1 et δ_2 opposées.

Prop : L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours pour solutions

$$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a}$$

4. Application à la géométrie

Prop 1 : Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe z' - z.

Prop 2 : Si $\vec{u}$ a pour affixe z et si $\vec{v}$ a pour affixe z' alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z + z'$

Prop 3 : Si $\vec{u}$ a pour affixe z et si $\vec{v}$ a pour affixe z' alors $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \frac{\arg(z')}{\arg(z)} = \arg(z') - \arg(z)$.

Prop 4 : 1. z et $\bar{z}$ sont les affixes de deux points symétriques autour de l'axe des abscisses.
2. z et $-z$ sont les affixes de deux points symétriques autour de l'origine.