Statistiques

0. OBJECTIFS

Présentation de données à l'aide de schémas afin d'en faciliter l'observation.
Analyser les données à l'aide de valeurs caractéristiques.

1. STATISTIQUES A UNE VARIABLE.

1.1 Vocabulaire de base

Population : Tout ensemble P étudié en statistique s'appelle une population.
Individu : Les éléments de la population sont appelés individus.
Echantillon : Tout sous - ensemble de P s'appelle un échantillon.
Variable statistique : On appelle variable statistique quantitative toute application X de P dans $\mathbb{R}$
La variable statistique est discrète lorsqu'elle ne prend que des valeurs isolées, elle est continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

1.2 effectifs, fréquences.

1.2.1 Variable discrète

Soient $\{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$ les valeurs distinctes prises par la variable X . On les appelle aussi **modalités** du caractère X. (Dans la pratique on a $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$)
On appelle **effectif** de la modalité x_i le nombre n_i d'éléments de P ayant x_i pour image par X.

L'effectif total de la population est le nombre n tel que $n = \sum_{i=1}^{i=m} n_i$.

On appelle **fréquence** de la modalité x_i le réel $f_i = \frac{n_i}{n}$. (souvent donnée en pourcentage)

Les fréquences cumulées croissantes cumulent les fréquences associées aux valeurs du caractère inférieures ou égales à x_i .

On a donc $F_1 = f_1$ et $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$ pour $i = 2, \ldots, m.$

Les fréquences cumulées décroissantes cumulent les fréquences associées aux valeurs du caractère supérieures ou égales à x_i .

On a donc $F_1' = f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 1$ et $F_i' = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} f_i$ pour $i = 2, \ldots, m.$

1.2.2 Variable continue

On partage l'intervalle I sur lequel X prend ses valeurs en intervalles disjoints appelés **classes** (en général de même amplitude).
$I = [x_0; x_1[\cup [x_1; x_2[\cup \ldots \cup [x_{m-1}; x_m]$ avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$
L'effectif n_i associé à l'intervalle $[x_{i-1}; x_i[$ s'appelle l'effectif de la classe. On désigne souvent une classe par $(c_i; n_i)$ c_i étant le centre de la classe et n_i son effectif.
L'effectif cumulé croissant arrêté à la classe $[x_{i-1}; x_i[$ est le nombre $N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i$ des valeurs inférieures à x_i .
L'effectif cumulé décroissant arrêté à la classe $[x_{i-1}; x_i[$ est le nombre $N_i' = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_m$ des valeurs supérieures à x_{i-1} .

On appelle fréquence de la classe le réel $f_i = \frac{n_i}{n}$.

1.3 Graphiques

Diagramme en bâton (discret) ou histogramme (continu)
Polygone des effectifs ; polygone des fréquences cumulées
Courbe cumulative des effectifs : C'est la représentation de la fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto$ (somme des effectifs $x_i < x$).

1.4 Caractéristiques de position

Mode : C'est la valeur du caractère correspondant à l'effectif le plus grand. Lorsqu'il s'agit de classe on parle de classe modale.

Médiane : C'est la valeur du caractère correspondant à un effectif cumulé égal à la moitié de l'effectif total.

Quartiles : Les 3 quartiles partagent la série en quatre séries de même taille.
25% des observations sont inférieures au 1er quartile Q_{25} ;
50% des observations sont inférieures au 2ème quartile Q_{50} ;
75% des observations sont inférieures au 3ème quartile Q_{75} .

rem : on peut aussi définir les 9 déciles ou les 99 centiles qui partagent la série respectivement en 10 ou en 100 séries de même taille.

Moyenne : C'est le nombre noté $\bar{x}$ ou parfois E(x) défini par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_m x_m}{n}.$$

Lorsqu'il s'agit de classe on remplace les valeurs x_i par les valeurs c_i correspondant aux centres des classes.

Prop : $E(X+b) = E(X) + b$ Changement par translation.
$E(aX) = aE(X)$ Changement par homothétie.

rem : Ces changements peuvent être utilisés pour obtenir un calcul plus simple de $E(X)$

1.5 caractéristiques de dispersion

Etendue : C'est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

Ecart interquartile : C'est le nombre $Q_{75} - Q_{25}$.

Variance et écart type
La variance d'une série statistique est la moyenne de carrés des écarts à la moyenne.

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m} n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Prop : $V(X+b) = V(X)$ Changement par translation.
$V(aX) = a^2 V(X)$ Changement par homothétie.

Conséquence : $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i {x_i}^2 - \bar{x}^2$

L'écart type d'une série statistique est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

2. STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

2.1. définition , présentation

Def : On appelle série statistique double pour les caractères *X* et *Y* l'application qui à chaque élément de Ω associe le couple $(x_i; y_i)$ où $\{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$ sont les valeurs du caractère *X* et $\{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$ sont celles du caractère *Y*.

Les résultats peuvent être présentés sous forme de données groupées ou sous forme de données non groupées.

Ex 1 : Données non groupées

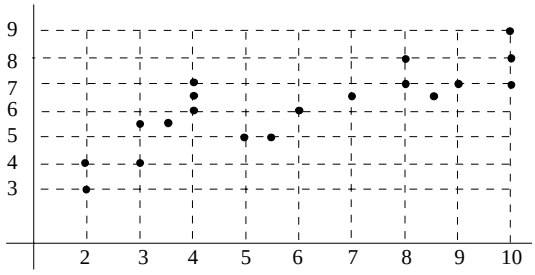
x_i	2	2	3	3	3,5	4	4	4	5	5,5	6	7	8	8	8,5	9	10	10	10	10
y_i	3	4	4	5,5	5,5	6	6,5	7	5	5	6	6,5	7	7,5	6,5	7	7	7,5	8	9

On peut choisir de regrouper les données en classes de largeur 2 et d'affecter à chaque classe la valeur centrale de l'intervalle.

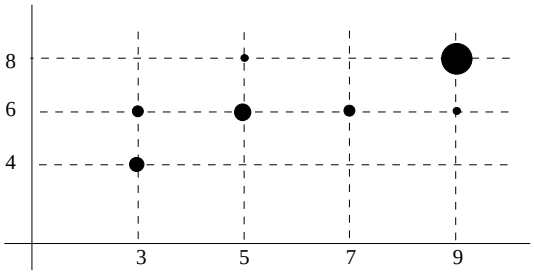
	intervalles en *x*	[2 ; 4 [	[4 ; 6 [	[6 ; 8 [	[8 ; 10]
intervalles en *y*		3	5	7	9
[3 ; 5 [	4	3	0	0	0
[5 ; 7 [	6	2	4	2	1
[7 ; 9 [	8	0	1	0	7

graphiques : nuages de points

Données non groupées



Données groupées



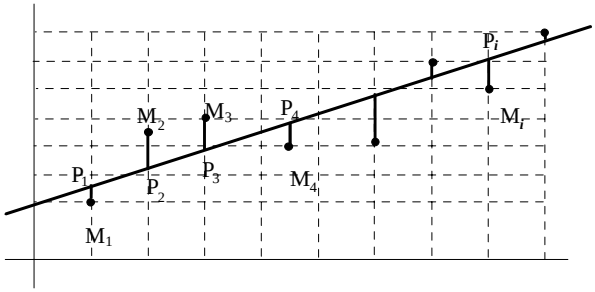
2.2 Ajustement linéaire : méthode de Mayer

Dans certaines situation le nuage de point semble donner un ensemble de points presque alignés. On va alors dans ces cas faire un ajustement linéaire c'est à dire trouver une droite d'équation $y = a.x + b$ qui permet de représenter cette série.

Méthode de Mayer : On partage le nuage en deux nuages de même effectif (à une unité près). On cherche alors pour chacun leur point moyen notés respectivement G_1 et G_2 . La droite (G_1G_2) est la droite d'ajustement selon la méthode de Mayer.

2.3 Droites de régression de *y* en *x* .

On appelle droite de régression de *y* en *x* la droite telle que la somme $S = \sum_{i=1}^{n} P_i M_i^{\,2}$ soit minimale.

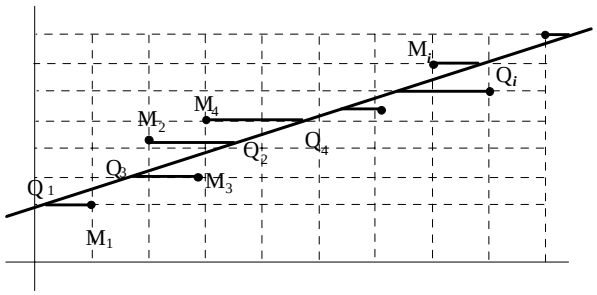


Cette droite a pour équation $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ avec $m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

On peut aussi écrire $m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^2}$ ou encore $m = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x^{\,2}}$

2.4 Droites de régression de *x* en *y* .

On appelle droite de régression de *x* en *y* la droite telle que la somme $S = \sum_{i=1}^{n} Q_i M_i^{\,2}$ soit minimale.



Cette droite a pour équation $y - \bar{y} = m'(x - \bar{x})$ avec $\dfrac{1}{m'} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$

On peut aussi écrire $m' = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - n\bar{y}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}$ ou encore $m' = \dfrac{\sigma_y^{\,2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}$

2.5 Corrélation linéaire

Def : On appelle covariance des variables X et Y le réel

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Les coefficients directeurs des droites de régression s'écrivent alors $m = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}; m' = \frac{{\sigma_y}^2}{\sigma_{xy}}$

Pour comparer les directions des deux droites de régression on est amené à comparer leurs coefficients directeurs m et m'.

or $\frac{m}{m'} = m \times \frac{1}{m'} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2} \times \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_y}^2} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2$

Les droites seront alors d'autant plus proches l'une de l'autre que le rapport $\frac{m}{m'}$ sera proche de 1.

ou encore que la quantité $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ sera proche de 1.

Def : La quantité $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ s'appelle le coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y de la série statistique double.