Dénombrement

1 METHODES DE BASE

Méth : On commence toujours par indiquer de façon précise comment on fait pour écrire ou coder un résultat

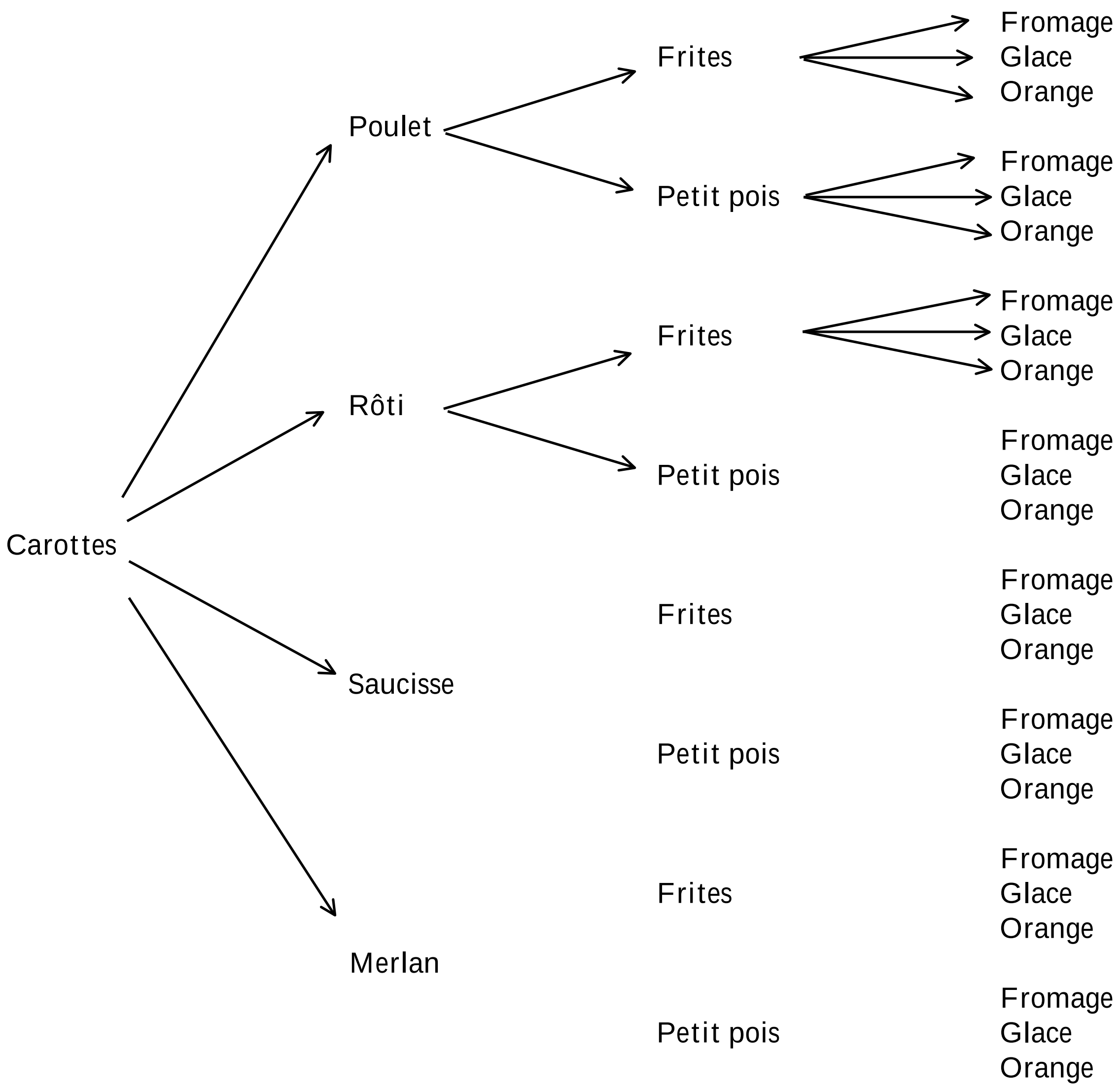
1.1 Arbre de choix

Ex1 : Au menu du self aujourd'hui, il y a :

Une entrée au choix : Carottes râpées ou Pâté ou Friand.
Une viande au choix : Poulet ou Rôti de porc ou Saucisse ou Merlan.
Un légume au choix : Frites ou Petits pois.
Un dessert au choix : Fromage ou glace ou Orange.

On va alors choisir

Une entrée **et** Une viande **et** un légume **et** Un dessert



. . . etc.

rem : Il n'est pas indispensable de dessiner la totalité de l'arbre mais simplement de faire comprendre comment fonctionne le procédé

On dispose donc de 3 choix pour l'entrée, 4 choix pour la viande, 2 choix pour le légume, 3 choix pour le dessert.

Total : $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ menus possibles !

1.2 Diagramme de Venn ou diagramme de Caroll

On parle d'ensemble de choses à l'intérieur duquel on forme des sous ensembles

Ω est l'ensemble considéré.
A en est une partie.
$\overline{A}$ est le complémentaire de A, c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
On peut aussi trouver B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$. . . etc.

Diagramme de Venn

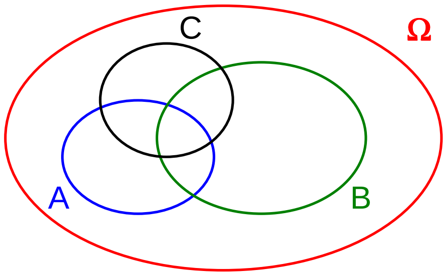
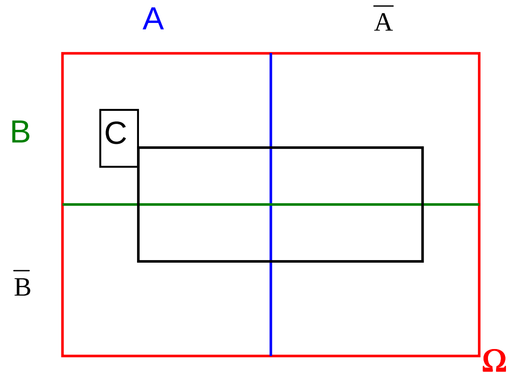


Diagramme de Caroll



Ex 2 : Problème de langues ou comment remplacer un long discours confus par un dessin clair (?)

II COMBINATOIRE

2.1 Tirages successifs et avec remise de p éléments parmi n : p - liste

Def : On appelle **p - liste** d'éléments pris parmi n, tout p - uplet d'éléments d'un ensemble à n éléments.

Ex 3 : Les numéros de téléphones à 8 chiffres.

Prop : Le nombre de tirages successifs avec remise de p éléments (p - listes) d'un ensemble à n éléments est de n^p .

Complément : Ex 4 : le nombre de parties d'un ensemble.

2.2 Tirages successifs et sans remise de p éléments parmi n : Arrangement

Def : On appelle **arrangement** de p éléments pris parmi n, tout p - uplet d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments

Ex 5 : Le tiercé.

Prop : Le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ex 6 : Choix d'un bureau : président, secrétaire, trésorier
Ex 7 : Vers les permutations

Def : On appelle **permutation** de n éléments tout arrangement de n éléments parmi n.

Prop : Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est égal à n!.
Ex 8 : Rangement de livres

2.3 anagrammes

Def : Etant donné un mot, on appelle **anagramme** de ce mot , tout autre mot obtenu en plaçant les lettres dans un ordre quelconque. On ne s'occupe pas de savoir si le mot obtenu est sensé ou non.

Prop : 1. Le nombre d'anagrammes d'un "mot" de *n* lettres distinctes est de *n*!
2. Si une lettre est répétée *p* fois, il faut diviser le nombre précédent par *p*!
3. Si plusieurs lettres sont répétées, on effectue la division comme au **2.** pour chacune.

Ex : Les anagrammes de BTS sont : BTS - BST - SBT - STB - TBS - TBS

Expliquer la manière d'écrire un résultat : Je prépare les cases
J'explique comment je place les lettres.
Ex 9 : anagrammes

Attention aux répétitions de lettres

Ex : TABLEAU : 7 lettres donc 7!, mais 2 fois le A donc $\frac{7!}{2!}$ anagrammes.

ANANAS : 6 lettres donc 6!, mais 3 fois A et deux fois N donc $\frac{6!}{3!2!}$

2.4 tirage simultané de p éléments pris parmi n : combinaison

Def : On appelle **combinaison** de p éléments pris parmi n, toute partie à p éléments de l'ensemble à n éléments.

Prop : Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments se note C_n^p .

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$$

Ex 10 : Groupes de professeurs
Conclusion : Attention **dans les cas 2.1 , 2.2 et 2.3 l'ordre des éléments intervient**
dans le cas 2.4 l'ordre n'intervient pas.
Ex 11 et 12 : Salades et mots

3 FORMULE DU BINOME DE NEWTON

3.1 Propriétés des C_n^p

$C_n^0 = C_n^n = 1$ $\quad$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ $\quad$ $C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ $\longrightarrow$ Tableau des C_n^p : **Triangle de PASCAL**

3.2 Formule du binôme

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + ... + C_n^p a^p b^{n-p} + ... + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p$$