Variables aléatoires réelles

1. Définition

Def 1 : Ω étant l'univers des résultats de l'expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) sur Ω toute application, notée X, de Ω vers $\mathbb{R}$

$$X \;:\; \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Def 2 : X(Ω) est l'ensemble des valeurs prises par X.

v.a.r discrète : Si X(Ω) un ensemble fini ou s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ on dit alors que la v.a.r est **discrète.**

Ex 1 : On lance deux dés. Ω est l'ensemble des résultats. Ω = { (1,1);(1,2); . . . ; (6,5);(6,6)}

Situation 1 : On note la somme des deux chiffres obtenus.

X(Ω) = { 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 }

Situation 2 : On lance deux dés et l'on note le produit des deux chiffres obtenus.

X(Ω) = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36 }

Ex 2 : Une usine de fabrication de composants d'ordinateurs étudie la durée de vie des éléments qu'elle fabrique. Cette durée de vie est exprimée en jours.

Ω est l'ensemble des composants. X(Ω) = $\mathbb{N}$.

v.a.r continue : Si X(Ω) peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$ on dit alors que la v.a.r est ***continue***.

Ex 3 : On étudie la taille des personnes d'une certaine population (exprimée en mètres). Il est logique de penser que cette taille est comprise dans l'intervalle [0; 3].

Mais la taille d'une personne donnée pourra prendre toute valeur réelle de cet intervalle.

Notation : $(X = x_i)$ représente la partie de Ω dont tous les éléments ont pour image x_i .

Ex 1 (situation 1) : $(X = 7)$ = { (1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)}.

Ex 1 (situation 2) : $(X = 12)$ = { (2,6);(3,4);(4,3);(6,2)}.

2. Variables aléatoires discrètes

2.1 Définitions

Def 3 : Loi de probabilité. C'est la fonction

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Prob}(X \leq x) \end{array}$$

La loi de probabilité est donnée par un tableau.

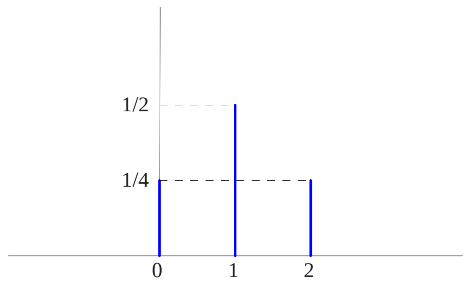
Ex : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie Ω = { PP; PF; FP; FF }.

X est la v.a.r associée au nombre de " faces " obtenus.

Loi de X

x_i	p_i
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Représentation de la loi de probabilité



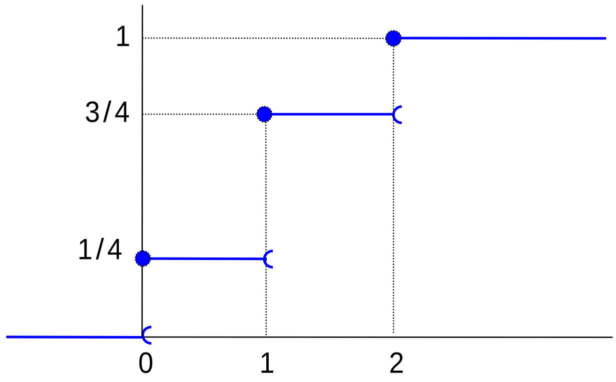
Def 4 : Fonction de répartition. C'est la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Prob}(X \leq x) \end{array}$

Elle est associée aux probabilités cumulées.

Tableau de calcul

x		0		1		2	
F(x)	0		1/4		3/4		1
		1/4		3/4		1	

Courbe représentative



2.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

Espérance mathématique : (moyenne) $\overline{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Variance : $V(X) = E\left[(X - \overline{X})^2\right]$ (Moyenne des carrés des écarts à la moyenne).

Ecart - type : $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés de l'espérance : $E(aX + bY) = a.E(X) + b.E(Y)$

$E(X + \mu) = E(X) + \mu$

Rem : $E(X - \overline{X}) = E(X) - \overline{X} = 0$. $X - \overline{X}$ s'appelle une **<u>variable aléatoire centrée</u>**.

Propriétés de la variance : $V(X + \mu) = V(X)$

$V(\lambda.X) = \lambda^2.V(X)$

conséquences : $V(X) = E(X^2) - \overline{X}^2$

$\sigma(\lambda.X) = \lambda.\sigma(X)$

rem : $\sigma = \sigma(X)$. $V\left(\frac{X - \overline{X}}{\sigma}\right) = 1$. On dit que $X - \overline{X}$ est une **<u>variable aléatoire normée</u>** .

Def : Une variable aléatoire est normée si son espérance est nulle et si sa variance est égale à 1.

2.3 Couple de variables aléatoires discrètes

X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers Ω.
$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$

Def : On appelle loi conjointe du couple (X; Y) l'application :

$$h : \begin{array}{ccl} X(\Omega)\times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_i ; y_j) & \longmapsto & h(x_i ; y_j) = \text{Prob}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] \end{array}$$

rem : La loi de probabilité d'un couple est donnée par un tableau.

X \ Y	y_1	y_2	....	y_j	....	y_m	
x_1							p_1
x_2							p_2
: :							
x_i				$h(x_i;y_j)$			p_i
: :							
x_n							p_n
	q_1	q_2		q_j		q_m	1

La loi de X est donnée par la dernière colonne où p_i est la somme des valeurs de la ligne associée à x_i .
La loi de Y est donnée par la dernière ligne où q_j est la somme des valeurs de la colonne associée à y_j .
Comme ces probabilités sont indiquées en marge du tableau, on les appelle les lois marginales de X et Y.

Prop : X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout i et pour tout j , les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants. On a alors :

$$h(x_i ; y_j) = \text{Prob}[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] = \text{Prob}(X = x_i) \times \text{Prob}(Y = y_j)]$$

Espérance et variance : Les méthodes de calcul sont les mêmes que pour une seule v.a.r.

Prop : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :

$$E(X.Y) = E(X).E(Y) \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

2.4 Exemples de v.a.r discrètes

2.4.1 Loi uniforme La v.a.r X suit une loi uniforme sur Ω si :

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \text{ et } \text{Prob}(x_1) = \text{Prob}(x_2) = \ldots = \text{Prob}(x_n) = \frac{1}{n}.$$

On a alors $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\qquad V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

Ex : On lance un dé non pipé et l'on considère la v.a.r X égale au résultat obtenu.

2.4.2 Loi de Bernouilli La v.a.r X suit une loi de Bernouilli sur Ω si :

$$X(\Omega) = \{0 ; 1\} \text{ avec } p(X = 0) = p \text{ et } \text{Prob}(X = 1) = q = 1 - p.$$

On a alors $E(X) = p$ $V(X) = pq$.

Ex 1 : On lance une pièce de monnaie. ($X = 0$) correspond à pile et ($X = 1$) correspond à face.
Ex 2 : Une urne contient N boules dont N_p (p proportion de rouges) sont rouges et N_q (q proportion de blanches) sont blanches.
($X = 1$) si la boule tirée est rouge. ($X = 0$) si la boule tirée est blanche.

2.4.3 Loi binômiale

La loi binômiale est la loi de probabilité d'une série d'épreuves de Bernouilli **indépendantes**
La variable aléatoire étant égale au nombre de succès dans une suite d'épreuves.

Notations : n représente le nombre d'épreuves.
p représente la probabilité de succès lors d'une épreuve.
La loi est alors notée $B(n;p)$.

$X(\Omega) = \{ 0; 1; 2; \ldots ; n \}$ $\text{Prob}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $E(X) = np$ $V(X) = npq$

Ex 1 : X est égale au nombre de "piles " obtenus au cours de n lancers indépendants d'une pièce.
Ex 2 : X est égale au nombre de boules rouges extraites au cours de n tirages successifs indépendants et avec remise, d'une boule dans une urne qui en contient N et dont N_p sont rouges et N_q sont blanches.

2.4.2 Loi de Poisson

λ est un réel strictement positif, on appelle loi de poisson de paramètre λ, notée $P(\lambda)$, la loi de la v.a.r définie sur $\mathbb{N}$ par :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ $\text{Prob}(X = k) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$.

Ex : La loi de Poisson se rencontre lorsque la réalisation d'un événement est rare sur un grand nombre d'observations. c'est le cas notamment dans les problèmes concernant les pannes de machines, les sinistres, la mortalité, . . .

<u>2.5 Lien entre loi binômiale et loi de Poisson</u>

Si " n est grand ", " p est voisin de 0 " et " np pas trop grand " alors on peut approximer la loi binômiale $B(n;p)$ par la loi de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$ et admettre que :

$$Prob(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \cong e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

rem : En général, on convient d'utiliser cette approximation lorsque $p \leq 0{,}1$ $n \geq 30$ et $np \leq 15$ ou lorsque $p \leq 0{,}1$ $n \geq 50$ et $np \leq 10$.

3. Variables aléatoires continues

3.1 Définitions

rem : Si X est une variable aléatoire continue, la probabilité que X prenne une valeur particulière quelconque est généralement nulle.
Ex : Combien y a - t - il d'individus dont la taille est 1,75 m parfaitement ? rep aucun .
Dans ce cas, il n'existe pas de loi de probabilité de X. on va définir une densité de probabilité.

Def 1 : On appelle densité de probabilité toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant les deux propriétés suivantes :

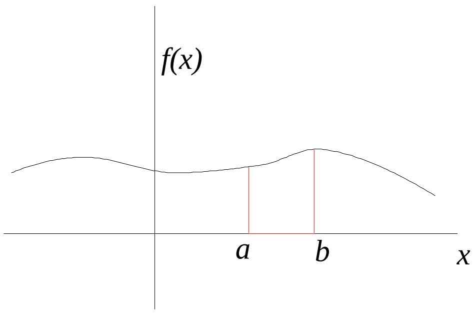
1. Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$.

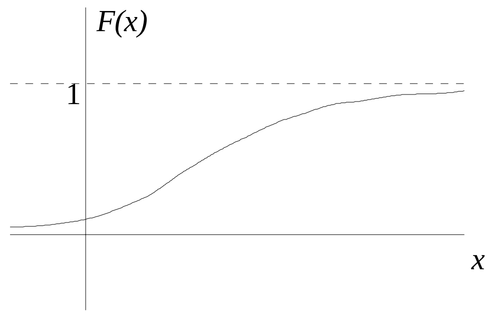
le calcul de probabilité se fera alors systématiquement sur un intervalle [$a; b$] en posant :

$$\text{Prob}(a < X < b) = \int_a^b f(x).dx$$

Def 2 : On appelle fonction de répartition la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u).du$



densité de probabilité



Fonction de répartition

3.2 Espérance et variance

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2.f(x).dx$$

3.3 Exemples de v.a.r continues

3.3.1 Loi exponentielle : On appelle loi exponentielle la loi de densité f définie par :

$$f_\lambda(t) = e^{-\lambda.t}$$

On rencontre cette loi dans l'étude des pannes (Taux d'avaries, fiabilité)

Caractéristiques : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\qquad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

3.3.1 Loi Normale : Soient m un réel et σ un réel strictement positif, on appelle Loi normale de moyenne m et d'écart - type σ notée N (m,σ) la loi de la v.a.r définie sur $\mathbb{R}$ par la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\frac{x-m}{\rho})^2 \right)$$

rem 1 : La loi normale appelée aussi loi de GAUSS est constatée expérimentalement de façon fréquente dans tous les cas de dispersion de valeurs au hasard autour d'une valeur centrale (mesure répétée d'une même grandeur, écart d'un projectile autour du point visé)

rem 2 : Dans les calculs, on utilise la loi Normale centrée réduite ($m = 0$ et $\sigma = 1$) donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On calcule toujours la probabilité que la v.a.r soit comprise dans un intervalle [*a;b*].

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est la fonction Π définie par :

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

3.5 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Si n est grand et p ni trop voisin de 0, ni trop voisin de 1 alors la loi binomiale B$(n;p)$ est très proche de la loi normale N $(np, \sqrt{npq}\,)$

Dans la pratique l'approximation est valable dès lors que np et nq sont supérieurs à 15 ou 20.