Fiabilité

Afnor: La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans les conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminées.

1. *Définitions*

Temps de bon fonctionnement (TBF) Time Between Failures
T est la variable aléatoire qui à tout dispositif associe son temps de bon fonctionnement ou sa durée de vie avant une défaillance.
La densité de probabilité de T, notée $f(t)$ est appelée la densité de défaillance.

Fonction de défaillance du système : Fonction de répartition de la v.a.r. T

$$F(t) = \text{Prob}(T \le t) = \int_0^t f(x)dx \qquad F'(t) = f(t) \qquad 0 \le F(t) \le 1$$

$F(t)$ est la probabilité que le système ait une défaillance avant l'instant t.

Fonction de fiabilité du système

$R(t)$ est la probabilité que le système n'ait pas de défaillance avant l'instant t.
$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F(t)$

2. *Estimation*

2.1 Méthode des rangs bruts $F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}$

2.2 Méthode des rangs moyens $F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}$

2.3 Méthode des rangs médians $F(t) = \dfrac{n_i - 0{,}3}{n + 0{,}4}$

3. *Taux de défaillance (ou taux d'avarie)*

3.1 Exemple

t_i	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
nombre d'éléments	13	9	6	4	2	1	0

Entre t_3 et t_4, le nombre d'avaries est $N_3 - N_4 = 2$.

Le taux d'avarie entre t_3 et t_4 est $\dfrac{N_3 - N_4}{N_3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Entre t_4 et t_5, le nombre d'avaries est $N_4 - N_5 = 2$.

Le taux d'avarie entre t_4 et t_5 est $\dfrac{N_4 - N_5}{N_4} = \dfrac{1}{2}$

Taux moyen d'avaries par unité de temps:

$t_4 - t_3 = 500$: Le taux d'avarie étant de 33,3%, le taux moyen sera $\dfrac{33{,}3\%}{500} \approx 0{,}07\%$

$t_5 - t_4 = 500$: Le taux moyen sera $\dfrac{50\%}{500} = 0{,}1\%$

3.2 cas général

On appele taux d'avarie instantané la quantité $\lambda(t)$ définie par :

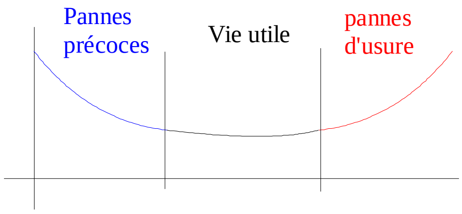
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad \text{ou} \quad \lambda(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} \quad \text{ou} \quad \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

On peut trouver $\lambda(t)$ si l'on connait $F(t)$ ou $R(t)$.

Réciproquement, on peut obtenir $R(t)$ et $F(t)$ à partir de $\lambda(t)$.

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -\lambda(t) \text{ donne } R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right] \text{ et } F(t) = 1 - \exp\left[\int_0^t \lambda(x)dx\right].$$

Remarque: Expérimentalement $\lambda(t)$ est une courbe en baignoire.



4. MTBF : Moyenne des temps de bon fonctionnement

C'est la moyenne de la variable aléatoire T définie au départ

$$MTBF = E(t) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x tf(t)dt.$$

Elle représente l'espérance de vie du dispositif.

5 Lois usuelles de la fiabilité

5.1 Loi exponentielle

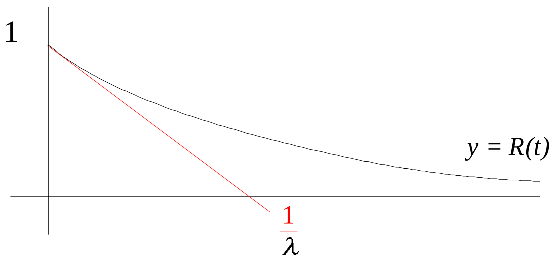
La loi exponentielle est la loi suivie par la v.a.r. T lorsque le taux d'avarie est constant.
Pour tout $t \geq 0$ on a $\lambda(t) = \lambda$ constante strictement positive.

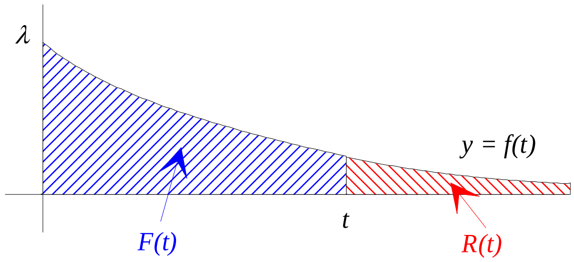
Pour tout $t \geq 0$:

Fonction de fiabilité: $R(t) = e^{-\lambda t}$

Fonction de défaillance: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Densité de probabilité: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$





MTBF : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ Ecart type : $\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$

L'utilisation de papier semi - logarithmique pour représenter $R(t)$ permet de déceler une loi exponentielle.

Si'il s'agit d'une loi exponentielle, la $MTBF = \frac{1}{\lambda}$ est l'antécédent de $e^{-1} \approx 0,368$

5.2 Loi de Weibull.

Ce mathématicien suédois a choisi une loi sous forme de puissance (calcul facile d'intégrales) avec 3 paramètres qui permettent d'obtenir les diverses situations : décroissante, constante et croissante.

$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$ pour $y > \gamma$, β, γ, η sont des constantes avec $\beta > 0$; $\eta > 0$;

On retrouve, pour tout $t > \gamma$

Fonction de fiabilité: $R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]$

Fonction de défaillance: $F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]$

Densité de probabilité: $f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right]$

On retrouve la MTBF et l'écart type à l'aide de tables (voir formulaire)

MTBF : $\eta A + \gamma$ et $\sigma = \eta\beta$

L'utilisation du papier imaginé par Weibull pour représenter *F(t)* permet de déceler une loi de Weibull. Les points de coordonnées (t_i ; $F(t_i)$) sont alignés lorsque $\gamma = 0$. on retrouve alors graphiquement les valeurs de β et de η

6 Fiabilite d'un système en fonction de ses composants

6.1 Constituants en série

Tous les constituants sont nécessaires au bon fonctionnement du système.

Pour que le système fonctionne il faut que tous les constituants fonctionnent.

La durée de vie T du système est donc définie par la relation :

$R(t) = \mathrm{Prob}(T > t) = \mathrm{Prob}\{T_1 > t \text{ et } T_2 > t \text{ et} \ldots \text{et } T_n > t\}$
$= \mathrm{Prob}\{(T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap \ldots \cap (T_n > t)\}$

Si les systèmes sont indépendants alors :

$R(t) = \mathrm{Prob}(T_1 > t) * \mathrm{Prob}(T_2 > t) * \ldots * \mathrm{Prob}(T_n > t)$

6.2 Constituants en parallèles

Le système ne sera défaillant que si tous les constituants sont défaillants.

La durée de vie T du système est donc définie par la relation :

$F(t) = \mathrm{Prob}(T \leq t) = \mathrm{Prob}\{T_1 \leq t \text{ et } T_2 \leq t \text{ et} \ldots \text{et } T_n \leq t\}$
$= \mathrm{Prob}\{(T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap \ldots \cap (T_n \leq t)\}$