Fonctions généralités

1 Fonctions de référence (rappels et compléments)

Activité 1 : Fonctions de référence activité : **f_ref_a.doc**

objectif :
- Revoir les fonctions de base, mémoriser leur courbe (fiche de synthèse).
- Revoir les propriétés de base, variation et inégalité.
- Voir parité, périodicité, symétrie.

Bilan du travail : Outre la fiche de synthèse sur les fonctions de référence, les propriétés suivantes seront connues des élèves.

Prop 1 : f est une fonction **strictement croissante** sur l'intervalle I si et seulement si

Pour tout a de I, pour tout b de I : a < b ñ f(a) < f(b)

rem : Une fonction croissante conserve le sens des inégalités.

Prop 2 : f est une fonction **strictement décroissante** sur l'intervalle I si et seulement si

Pour tout a de I, pour tout b de I : a < b ñ f(a) < f(b)

rem : Une fonction décroissante inverse le sens des inégalités.

Prop 3 : f est une fonction **paire** si et seulement si

pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

rem : f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est axe de symétrie pour C_f

Prop 4 : f est une fonction **impaire** si et seulement si

pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

rem : f est paire si et seulement si la courbe C_f *est symétrique par rapport à l'origine.*

Prop 5 : f est une fonction **périodique** de période T si et seulement si

pour tout x de D_f, $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

rem : Il suffit alors de connaître la courbe sur une période; la totalité de la courbe s'obtenant par translations successives de vecteur T.Å ou *- T.Å*

Feuille bilan : **f_ref_c.doc**

Applications

Utilisation d'une courbe

2 opérations sur les fonctions

2.1 fonctions associées

Def : On appelle fonctions associées à une fonction donnée $u : x \longmapsto u(x)$ les fonctions suivantes :

$u_1 : x \longmapsto u(x)+k;$ $u_2 : x \longmapsto u(x+k);$ $u_3 : x \longmapsto k.u(x);$ $u_4 : x \longmapsto u(k.x);$ $|u| : x \longmapsto |u(x)|$.

Activité 2 : Fonctions associées ☞ · · · T.I.C.E **fa5_elv.xls**

Objectifs : • Observer les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction donnée.
• L'activité permet aussi une prise en main du tableur Excel.

Bilan du travail

Prop 1 : La courbe représentative de la fonction $u+k : x \longmapsto u(x)+k$ se déduit de celle de la fonction $u : x \longmapsto u(x)$ par une translation de vecteur $k.\vec{j}$.
rem : Les fonctions u *et* $u+k$ *varient de la même manière.*

Prop 2 : La courbe représentative de la fonction $u_2 : x \longmapsto u(x+k)$ se déduit de celle de la fonction u : $x \longmapsto u(x)$ par une translation de vecteur $-k.\vec{i}$.

Prop 3 : La courbe représentative de la fonction $k.u : x \longmapsto k.u(x)$ se déduit de celle de la fonction u : $x \longmapsto u(x)$ en multipliant les ordonnées des points de la courbe par le réel k.
A partir du point $M(x;u(x))$ *de la courbe* C_u *on construit le point* $M'(x;k.u(x))$ *de la courbe* $C_{k.u}$.
rem : Si $k > 0$ *alors les fonctions* u *et* $k.u$ *varient de la même manière.*
Si $k < 0$ *alors les fonctions* u *et* $k.u$ *varient en sens contraires.*

Prop 3 : La courbe représentative de la fonction $u_4 : x \longmapsto u(k.x)$ se déduit de celle de la fonction u : $x \longmapsto u(x)$ en divisant les abscisses des points de la courbe par le réel k.
A partir du point $M(x;u(x))$ *de la courbe* C_u *on construit le point* $M'(\frac{x}{k};u(x))$ *de la courbe* $C_{k.u}$.

Prop 4 : La courbe représentative de la fonction $|u| : x \longmapsto |u(x)|$ se déduit de celle de la fonction $u : x \longmapsto u(x)$ en conservant la partie de la courbe C_u située au dessus de l'axe des abscisses et en remplaçant la partie située au dessous de cet axe par sa symétrique autour dudit axe.
Si $u(x) \geq 0$ *alors le point* $M(x;u(x))$ *de la courbe* C_u *est aussi un point de* $C_{|u|}$.
Si $u(x) \leq 0$ *alors à partir du point* $M(x;u(x))$ *de la courbe* C_u *on construit le point* $M'(x\,;-u(x))$ *de la courbe* $C_{|u|}$.

Activité 3 : Paraboles ☞ · · · **para_act.doc** (solution : **para_sol.doc**)

Objectifs : • Observer des paraboles et être capable d'en donner une équation par lecture directe.
• Préparer la résolution de l'équation du second degré.

Bilan du travail

Prop 5 : La parabole d'équation $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}\,(x_0; y_0)$

Conséquence : La fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \ldots$ admet pour courbe représentative une parabole de sommet S $(-\frac{b}{2a} ; f(-\frac{b}{2a}))$.

D'où le tableau de variation de f

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$+\infty$ ↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗ $+\infty$

Si a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = -(x^2 + bx + c)$	$-\infty$ ↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘ $+\infty$

2.2 Opérations sur les fonctions

De même que sur les nombres, nous pouvons effectuer des opérations sur les fonctions.
Soient $u : x \longmapsto u(x)$ et $v : x \longmapsto v(x)$ deux fonctions définies sur un même intervalle D alors pour tout réel x de D nous pouvons effectuer des calculs sur les réels $u(x)$ et $v(x)$.

Nous définissons ainsi les fonctions
$u+v : x \longmapsto u(x) + v(x)$; $u - v : x \longmapsto u(x) - v(x)$; $u.v : x \longmapsto u(x).v(x)$
et si pour tout x de D $v(x)$ ý 0, nous pouvons aussi définir $\frac{u}{v} : x \longmapsto \frac{u(x)}{v(x)}$.

Def : a est un réel non nul et n est un entier naturel.
La fonction $x \longmapsto a.x^n$, définie sur Ë est appelée **monôme de coefficient *a* et de degré *n*.**
Un **polynôme** est une somme de monômes : $4x^5 - 3x^2 + 18x - 7$ est un polynôme de degré 5.

Activité 3 : Opérations sur les fonctions ☞ · · · T.I.C.E **ope_elv.xls**

Objectifs :
- Observer les courbes représentatives des fonctions $u+v$; $u - v$; $u.v$; $\frac{u}{v}$.
- Observer les variations de ces fonctions et démontrer certaines propriétés.

Bilan :

Prop 1 : La somme de deux fonctions strictement croissantes sur un intervalle D est une fonction strictement croissante sur D.
La somme de deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle D est une fonction strictement décroissante sur D.

Important : Il n'existe pas de résultat analogue pour les fonctions $u - v$; $u.v$; $\frac{u}{v}$.

Activité 4 : Composées de fonctions

Objectifs : • Définir la composée de deux fonctions.
• Observer les variations et démontrer les propriétés.

Bilan :

Def : Définition d'une fonction composée $g \circ f$ se lit " g **rond** f "

$$
\begin{array}{llllll}
g \circ f : & I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K \\
 & x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \\
 & & & X & \longrightarrow & g(X)
\end{array}
$$

Attention : $g \circ f$ ý $f \circ g$

Prop : Si f et g ont le même sens de variation alors $g \circ f$ est strictement croissante.
Si f et g ont des sens de variation contraires alors $g \circ f$ est strictement décroissante.

Application

Fonctions de référence

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8 huit fonctions telles que :

f_1 est définie sur Ë par $f_1(x) = x^2$.

f_2 est définie sur Ë$^{\times}$ = Ë-{0} par $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

f_3 est définie sur Ë par $f_3(x) = |x|$

f_4 est définie sur Ë par $f_4(x) = \sin x$.

f_5 est définie sur Ë par $f_5(x) = ax + b$ avec $a > 0$.

f_6 est définie sur Ë par $f_6(x) = ax + b$ avec $a < 0$.

f_7 est définie sur Ë$^{+}$ = $[0; +\infty[$ par $f_7(x) = \sqrt{x}$

f_8 est définie sur Ë par $f_8(x) = \cos x$.

et leurs représentations graphiques dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, Å, Å) .

1. Associer à chaque courbe de la feuille jointe sa fonction correspondante.

2. Associer à chacune des propriétés suivantes la (ou les) fonction(s) qui lui correspondent :

La fonction est strictement croissante sur Ë.

La fonction est strictement décroissante sur Ë.

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

La fonction est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

La fonction est linéaire.

La fonction est affine.

La courbe est une droite.

La courbe est une parabole.

La courbe est une hyperbole.

La courbe est une sinusoide.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine.

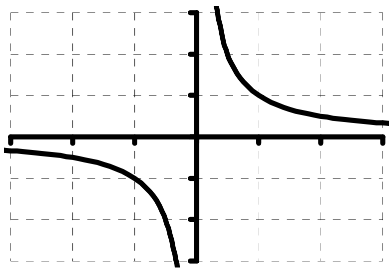
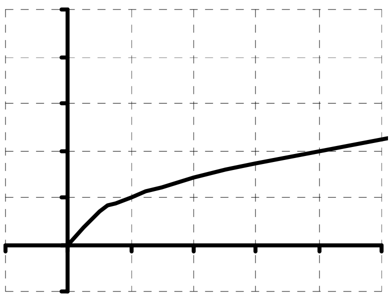
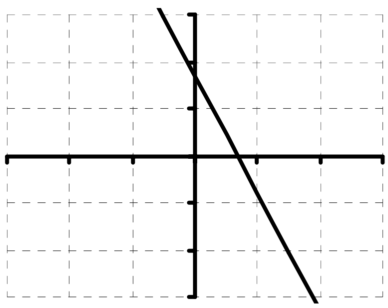
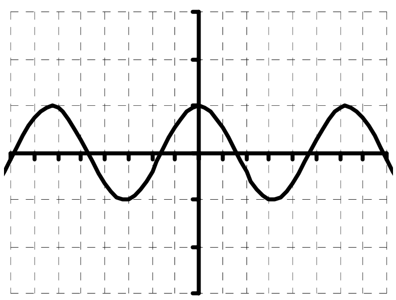
L'axe des ordonnées est axe de symétrie pour la courbe.

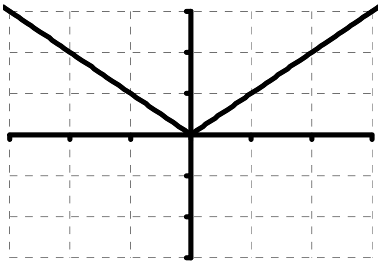
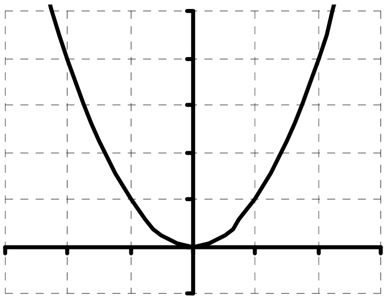
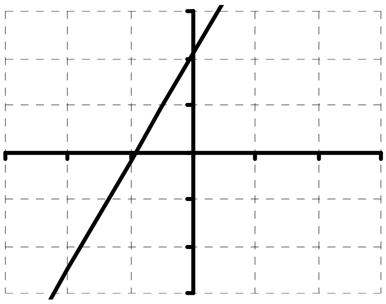
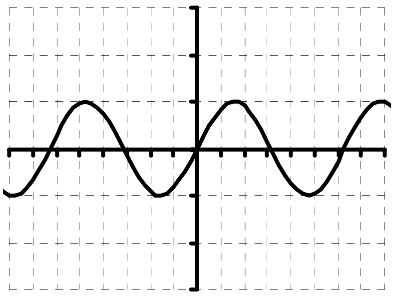
La fonction est paire.

La fonction est impaire.

La fonction est périodique.

Fonctions de référence

: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	

: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	
: Ë ⟶ Ë $x \longmapsto$ 	

Fonctions associées

Objectif

Observer les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction donnée.
L'activité permet aussi une prise en main du tableur Excel.

Introduction

On appelle fonctions associées à une fonction donnée $u : x \longmapsto u(x)$ les fonctions suivantes :
$u_1 : x \longmapsto u(x)+k;$ $u_2 : x \longmapsto u(x+k);$ $u_3 : x \longmapsto k.u(x);$ $u_4 : x \longmapsto u(k.x);$ $|u| : x \longmapsto |u(x)|$.
Il est important de connaître le lien existant entre la courbe représentative de u et les courbes des fonctions qui lui sont associées.

Activité

Lancer l'application Excel et ouvrir le document **fa5_elv.xls**
L'écran se présente sous la forme d'une *"feuille de calcul"* avec un graphique.

☞ . . . Apprendre à repérer le nom d'une *"cellule"*.

Partie 1 :

1. **Nous allons tracer la courbe représentative de la fonction *u* sur l'intervalle [- 5; 5].**
La première colonne va contenir les valeurs de x entre - 5 et 5 avec un pas de 0,5.
Comment remplir rapidement la colonne ?
☞ . . . Les graduations en abscisse apparaissent

La seconde colonne va contenir les valeurs de $u(x)$ correspondantes.
Comment calculer dans la cellule B3 la valeur de $u(x)$ lorsque x prend la valeur de la cellule A3 ?
Comment remplir rapidement la suite de la colonne ?
☞ . . . La courbe représentative de u est dessinée en noir.

2. **Nous allons tracer la courbe représentative de la fonction $u_1 : x \longmapsto u(x)+k$**
La troisième colonne va contenir les valeurs de $u(x)+k$ où k prend la valeurs de la cellule F1.
Remplir la colonne.
☞ . . . La courbe représentative de la fonction $u_1 : x \longmapsto u(x)+k$ est dessinée en bleu.

3. **Nous pouvons alors changer la valeur de *k* et observer diverses courbes**

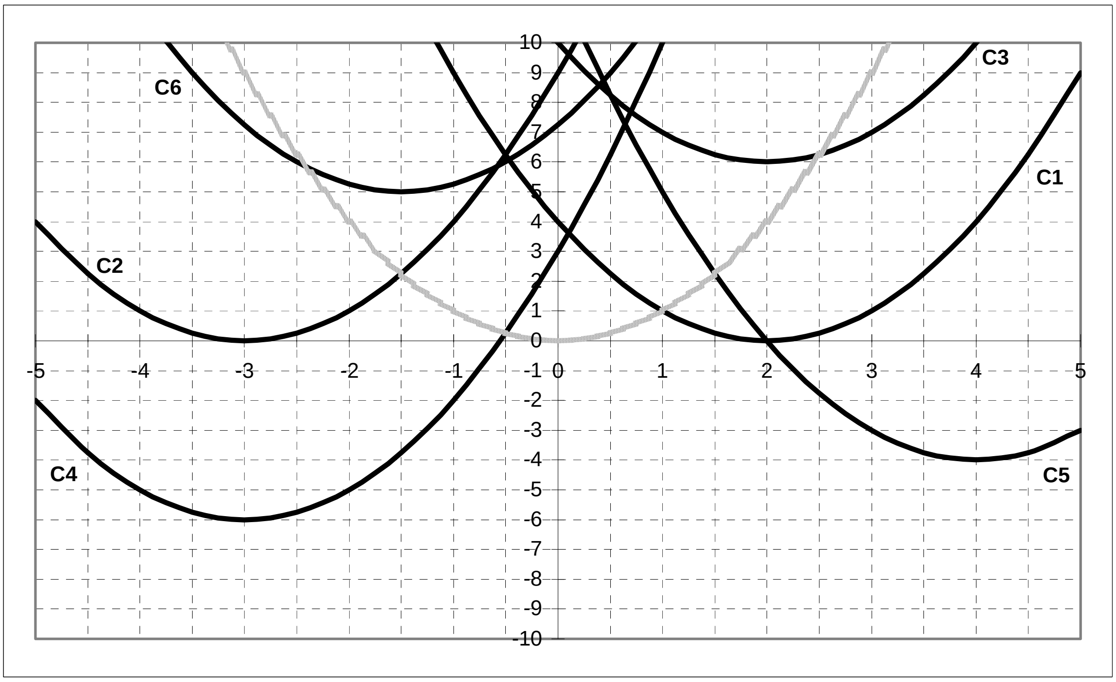
Observer le bas de l'écran pour voir que l'on dispose de plusieurs feuilles de calcul correspondant aux diverses fonctions associées

Partie 2 : Etude de la fonction $u_2 : x \longmapsto u(x+k);$
Partie 3 : Etude de la fonction $u_3 : x \longmapsto k.u(x);$
Partie 4 : Etude de la fonction $u_4 : x \longmapsto u(k.x).$
Partie 5 : Etude de la fonction $u_5 : x \longmapsto |u(x)|.$

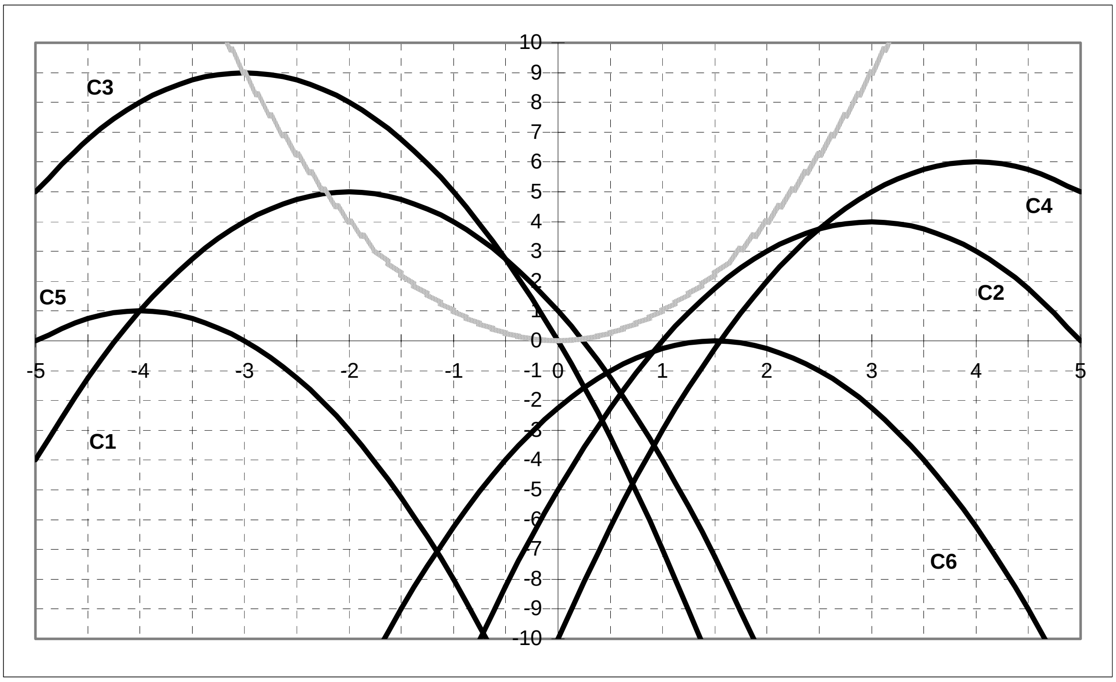
Paraboles

Partie 1

Par une lecture directe sur le graphique déterminer une équation cartésienne de chacune des six paraboles dessinées sur la figure ci - contre sachant qu'elles sont image de la fonction carré par une translation.

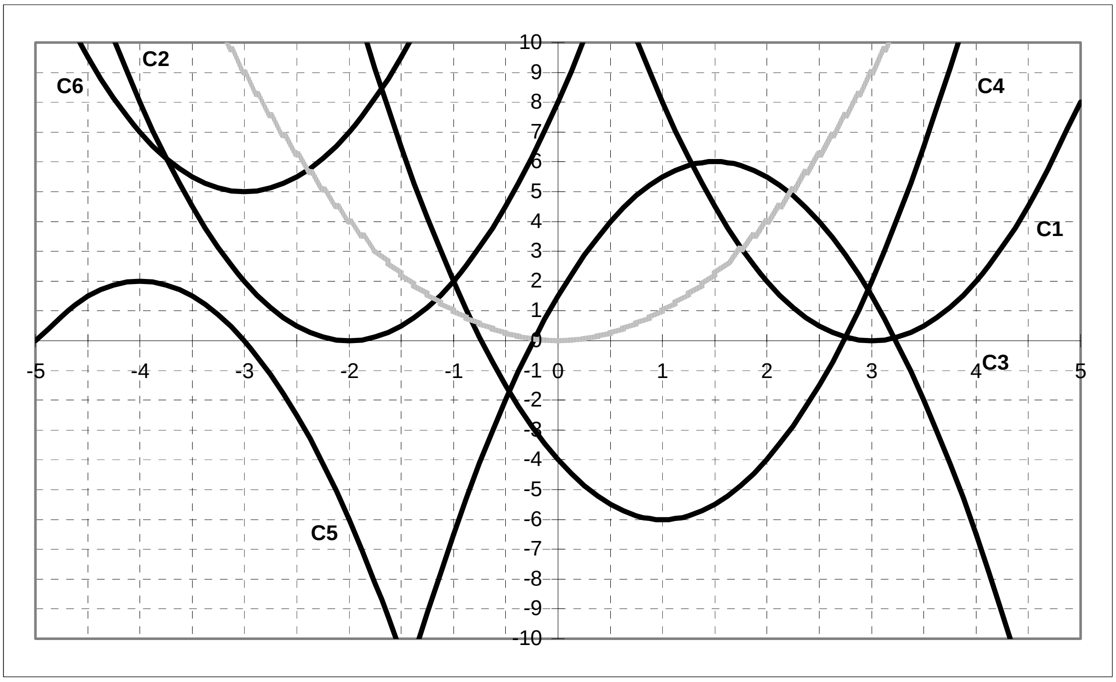


Partie 2 Même problème sachant que l'on a introduit des symétries autour de l'axe des abscisses.



Partie 3

Même problème sachant que l'équation s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$ ou $a = -2$.



Partie 4

Même problème mais il faut tout retrouver sur la figure.