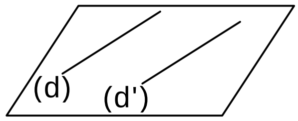
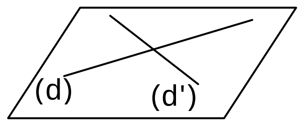
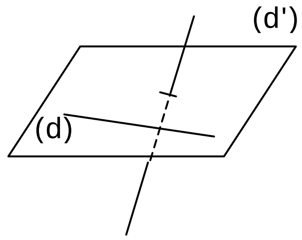
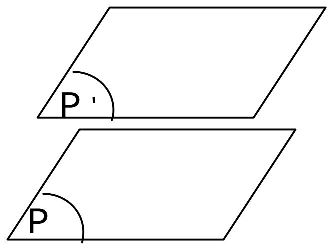
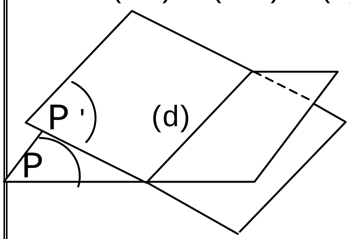
Géométrie dans l'espace

1 Parallélisme

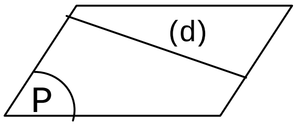
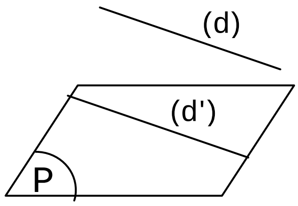
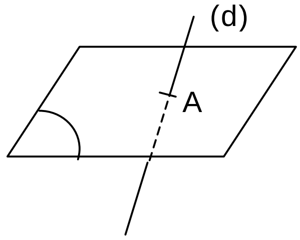
1.1 Position relative de deux droites

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
(d) // (d') $(d) \cap (d') = \emptyset$	(d) et (d') sécantes $(d) \cap (d') = \{A\}$	$(d) \cap (d') = \emptyset$
		

1.2 Position relative de deux plans

Plans parallèles		Plans sécants
$(P) = (P')$	$(P) \cap (P') = \emptyset$	$(P) \cap (P') = (d)$
		

1.3 Position relative d'une droite et d'un plan

Droite parallèle au plan		Droite sécante au plan
$(d) \subset (P)$	$(d) \cap (P) = \emptyset$ (d) est parallèle à (d')	$(d) \cap (P) = \{A\}$
		

Convention de dessin : Dans les figures ci - dessus, les plans sont représentés par des rectangles en perspective. Ces figures sont destinées à forger une image des situations présentées.

1.4 Propriétés

• Dans tout plan de l'espace les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent.

• Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.

• Pour que deux plans soient parallèles, il suffit que l'un contienne deux droites sécantes parallèles à l'autre.

• Si deux droites sont parallèles alors :
- ▶ Tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- ▶ Toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

• Si deux plans sont parallèles alors :
- ▶ Toute droite parallèle à l'un est paralèle à l'autre.
- ▶ Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
- ▶ tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles

• Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles

• Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur intersection.

1.5 Section de solides

Méthode générale : Construire la section d'un solide par un plan $\mathcal{P}$ c'est construire les intersections du plan $\mathcal{P}$ avec les faces du solide.

rem : La section obtenue est un polygone dont les côtés sont sur les faces du solide.

Meth 1 : On cherche sur une face du solide, deux points communs à cette face et au plan de section $\mathcal{P}$.

Meth 2 : Un plan coupe deux plans paralléles selon des droites paralléles.

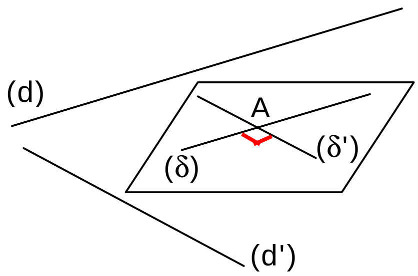
Meth 3 : Pour trouver l'intersection d'une droite d et d'un plan, on construit l'intersection de la droite d et d'une droite particulière d' du plan dont on sait que <u>d et d' sont coplanaires</u> .

Meth 4 : Deux droites coplanaires appartenant à deux plans sécants se coupent sur la droite d'intersection des deux plans.

2 Orthogonalité

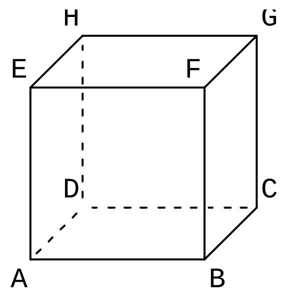
2.1 Droites orthogonales

Définition : Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles (δ) et (δ') passant par un point A quelconque de l'espace sont perpendiculaires dans le plan qui les contient.



Exemples

La droite (EF) est perpendiculaire à la droite (FB).
La droite (EF) est orthogonale à la droite (CG).

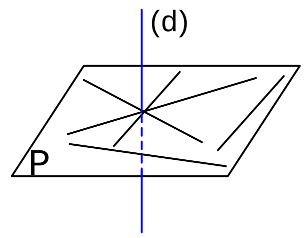


Conséquences :

- perpendiculaire = orthogonal + sécant. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
- Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à toute droite parallèle à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

2.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition : Une droite (d) et un plan (P) sont orthogonaux si et seulement si la droite (d) est orthogonale à toutes les droites du plan (P).



Théorème (de la porte)

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple

La droite (EF) est orthogonale au plan (BCG).

Conséquences :

- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Définition (plan médiateur)

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan appelé plan médiateur du segment [AB].

Prop : Le plan médiateur d'un segment [AB] est le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu I de [AB].

2.3 Méthodes

▶ Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on montre souvent que l'une est orthogonale à un plan qui contient l'autre.

Pour démontrer q'une droite (d) est orthogonale à un plan (P) , on utilise l'une des deux méthodes suivantes

- ▶ On montre que la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).
- ▶ On montre que le plan (P) est le plan médiateur d'un segment inclus dans (d).

3 vecteurs de l'espace

3.1 Opérations sur les vecteurs

Les définitions et propriétés des vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace.

Somme

La somme des vecteurs Å et Å est le vecteur Å tel que si A est un point quelconque de l'espace et si B est tel que $\overrightarrow{AB}$ = Å, si C est tel que $\overrightarrow{BC}$ = Å alors Å = $\overrightarrow{AC}$.(Relation de Chasles)

Produit par un réel

Le produit du vecteur Å (Å ý Å) par le réel k (k ý 0) est le vecteur noté k.Å tel que

① Å et k.Å ont la même direction.

② Å et k.Å ont le même sens si $k > 0$ et sont de sens contraires si $k < 0$.

③ || k.Å || = |k|.|| Å ||

Si $k = 0$ ou Å = Å alors k.Å = Å.

3.2 Vecteurs colinéaires

Deux vecteur Å et Å de l'espace sont colinéaires si et seulement si il existe trois points A, B et C alignés de l'espace tels que Å = $\overrightarrow{AB}$ et Å = $\overrightarrow{AC}$.

Propriété : Les vecteurs non nuls Å et Å de l'espace sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que Å = k. Å

Méthode : La colinéarité des vecteurs est très utile lorsque l'on veut prouver que :

① 3 points sont alignés.

② 2 droites sont parallèles.

Vecteur directeur

Le vecteur Å est un vecteur directeur de la droite (d) si et seulement si il existe deux points distincts A et B de la droite (d) tels que Å = $\overrightarrow{AB}$.

Repère d'une droite

Un repère d'une droite (d) est un couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de la droite et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

Caractérisation d'une droite

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = k.\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}$) est la droite de repère $(A, \vec{u})$.

Le réel k s'appelle l'abscisse du point M dans le repère $(A, \vec{u})$.

3.2 Vecteurs coplanaires

Caractérisation d'un plan

Soit A un point de l'espace et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$ est le plan ($\mathcal{P}$) de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Si B et C sont les points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$ alors ($\mathcal{P}$) est le plan (ABC).

Les réels a et b s'appellent les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Vecteurs coplanaires

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe quatre points A, B, C et D coplanaires tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{w} = \vec{AD}$.

Caractérisation de la coplanarité

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$. ($\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Prop : Trois vecteurs non nuls de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

3.3 Base et repère de l'espace

base de l'espace

Si 3 vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ de l'espace ne sont pas coplanaires alors ils constituent une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Conséquence :

Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

C'est à dire, il existe un unique triplet de réels *(x; y; z)* tels que $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

(x; y; z) s'appelle les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

x est l'abscisse, *y* est l'ordonnée, *z* est la cote.

Propriété de calcul

Les propriétés de calcul de la géométrie analytique plane s'étendent sans difficulté à l'espace :

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ alors

① $\vec{u} + \vec{u'}$ a pour coordonnées $(x+x'; y+y'; z+z')$

② $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $(k.x; k.y; k.z)$.

Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire si l'on peut trouver un réel k tel que $x' = k.x$; $y' = k.y$ et $z' = k.z$.

Repère de l'espace
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Conséquence
Tout point M de l'espace admet un unique triplet de coordonnées $(x; y; z)$ caractérisé par
$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Propriétés de calcul
Si les points M et M' ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $((x'; y': z')$ alors

① Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $(x' - x; y' - y; z' - z)$.

② Le milieu de [MM'] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x+x'}{2} ; \dfrac{y+y'}{2} ; \dfrac{z+z'}{2}\right)$.

Repère orthonormal
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace si et seulement si les trois droites de repères respectifs $(O, \vec{i})$, $(O, \vec{j})$ et $(O, \vec{k})$ sont orthogonales deux à deux.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace si et seulement si le repère et orthgonal et si en plus les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont tous une norme égale à l'unité de longueur choisie dans l'espace.

Conséquence : Dans un repère orthonormal de l'espace

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x; y; z)$ a pour norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- La distance entre deux points A et B de l'espace est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2+(y_B - y_A)^2+(z_B - z_A)^2}$.

4. Barycentre de l'espace

Toutes les définitions et propriétés des barycentres dans le plan s'étendent à l'espace avec en plus la propriété suivante :

Si A, B et C sont trois points distincts de l'espace alors tout barycentre de ces trois points est un point du plan (ABC).
réciproquement, tout point du plan (ABC) est un barycentre des points A, B et C.

Cette propriété permet donc de prouver qu'un point M est dans le plan (ABC) en prouvant qu'il est barycentre des trois points.