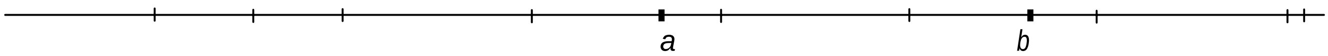
Ordre

1. COMPARAISON

Lorsque deux nombres réels ne sont pas égaux, il y en a un qui est plus grand que l'autre.
Mettre dans l'ordre ou ordonner ou comparer, c'est dire lequel est le plus petit.
On utilise les symboles $<$; $<$; $\leq$; $\geq$.

Rem : Je préfère $<$ (ou $\leq$) car comme cela les nombres sont écrits de la même manière qu'ils sont représentés sur la droite réelle.



$a < b$: Sur la figure le point d'abscisse a est situé à gauche du point d'abscisse b.

Ex 1 : Comparaison de fractions (sans calculatrice)

Prop 1 : Entre deux fractions de même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Prop 2 : Entre deux fractions de même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Prop 3 : Pour comparer deux nombres on peut les comparer à un troisième :
Si $a < \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b} < c$ alors $a < c$.

Ex 2 : Comparaison de réels (avec la calculatrice). On compare des écritures décimales.

Ex 3 : On recommence mais il y a des problèmes. Limites de la calculatrice. On laisse tomber, on terminera plus tard.

Ex 4 : Comparaison de nombres en écriture scientifique.

2. ORDRE ET OPERATIONS

Prop 4 : On peut additionner ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité :

Si $a < b$ alors $a + \boldsymbol{c} < b + \boldsymbol{c}$ et $a - \boldsymbol{c} < b - \boldsymbol{c}$.

Prop 5 : La multiplication par un nombre réel positif ne change pas l'ordre.
Si $\boldsymbol{c > 0}$ alors $a < b$ ð $a.\boldsymbol{c} < b.\boldsymbol{c}$
La multiplication par un nombre réel négatif inverse l'ordre.
Si $\boldsymbol{c < 0}$ alors $a < b$ ð $a.\boldsymbol{c} > b.\boldsymbol{c}$

Ex 5.1 : ordre et addition ☞ · · · pas de problèmes
ordre et produit ☞ · · · pas de problèmes

Ex 5.2 : soustraction ☞ · · · problème

Ex 5.3 : quotient ☞ · · · problème

Ex 6 : produit ☞ · · · problème

Prop 6 : On peut ajouter membres à membres des inégalités

$$
\begin{array}{rccc}
 & a & < & b \\
+ & c & < & d \\
\hline
 & a+c & < & b+d
\end{array}
$$

Rem : ***On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre des inégalités.***
Avec les multiplications, il faut se méfier.

Prop 7 : On peut multiplier membres à membres des inégalité dont tous les membres sont positifs

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 0 & < & a & < & b \\
+ & 0 & < & c & < & d \\
\hline
 & 0 & < & ac & < & bd
\end{array}
$$

Ex 7 : Aplication de ces propriétés

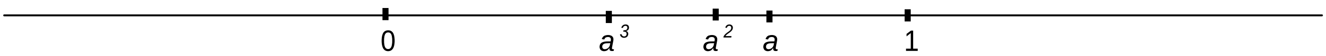
3. ORDRE ET SIGNE

Prop 8 : $a < b$ équivaut à $b - a$ est strictement positif. ($0 < b–a$)
$a > b$ équivaut à $b - a$ est strictement négatif ($0 < b–a$)

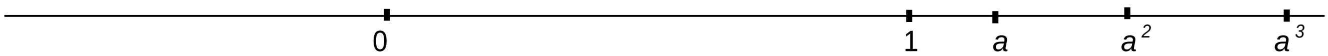
Méthode: Pour comparer deux nombres, on étudie le signe le leur différence.

Ex 8 : Comparaison de a, a^2, a^3 .

Prop 9 : Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a < 1$.



Si $1 < a$ alors $1 < a < a^2 < a^3$.



Ex 9 : Comparaison de carrés et d'inverses

Prop 10 : Deux réels positifs sont dans le même ordre que leurs carrés.
Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$.
Deux réels négatifs sont dans l'ordre inverse de leurs carrés.
Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.

Prop 11 : Deux réels de même signe sont dans inverse de leurs inverses
Si $0 < a < b$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
Si $a < b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Ex 10 et 11

4. ENCADREMENT, INTERVALLES DE $\mathbb{R}$.

Def : Encadrer un réel x c'est trouver deux nombres réels u et v tels que $u < x < v$.
L'amplitude de l'encadrement est le réel $v - u$.

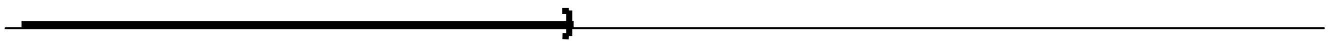
Notations

Si $u < x < v$ alors on dit que x appartient à l'intervalle ouvert $]\, u\, ;\, v\, [$. $x \in\,]\, u\, ;\, v\, [$.

Si $u \leq x \leq v$ alors on dit que x appartient à l'intervalle fermé $[\, u\, ;\, v\,]$. $x \in [\, u\, ;\, v\,]$.

Si $x > u$ alors dit que x appartient à l'intervalle $]\, u\, ;\, +\infty\, [$.

Si $x \leq u$ alors dit que x appartient à l'intervalle $]\, -\infty\, ;\, u\,]$.



L'ensemble des réels positifs est l'intervalle $[\, 0\, ;\, +\infty\, [$, on le note $\mathbb{R}^{+}$.

L'ensemble des réels strictements positifs est l'intervalle $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$, on le note $\mathbb{R}\times^{+}$.

1. COMPARAISON

Prop 1 : Entre deux fractions de même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Prop 2 : Entre deux fractions de même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Prop 3 : Pour comparer deux nombres on peut les comparer à un troisième :

Si $a < \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b} < c$ alors $a < c$.

2. ORDRE ET OPERATIONS

Prop 4 : On peut additionner ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité :

Si $a < b$ alors $a + \boldsymbol{c} < b + \boldsymbol{c}$ et $a - \boldsymbol{c} < b - \boldsymbol{c}$.

Prop 5 : La multiplication par un nombre réel positif ne change pas l'ordre.

Si $\boldsymbol{c > 0}$ alors $a < b$ ð $a.\boldsymbol{c} < b.\boldsymbol{c}$

La multiplication par un nombre réel négatif inverse l'ordre.

Si $\boldsymbol{c < 0}$ alors $a < b$ ð $a.\boldsymbol{c} > b.\boldsymbol{c}$

Prop 6 : On peut ajouter membres à membres des inégalités

$$\begin{array}{rccc} & a & < & b \\ + & c & < & d \\ \hline & a+c & < & b+d \end{array}$$

Rem : ***On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre des inégalités.***
Avec les multiplications, il faut se méfier.

Prop 7 : On peut multiplier membres à membres des inégalité dont tous les membres sont positifs

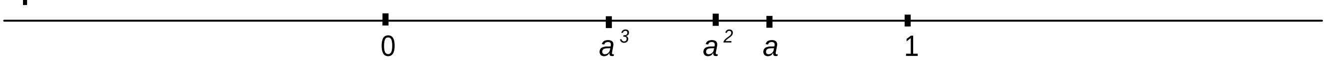
$$\begin{array}{rccccc} & 0 & < & a & < & b \\ + & 0 & < & c & < & d \\ \hline & 0 & < & ac & < & bd \end{array}$$

3. ORDRE ET SIGNE

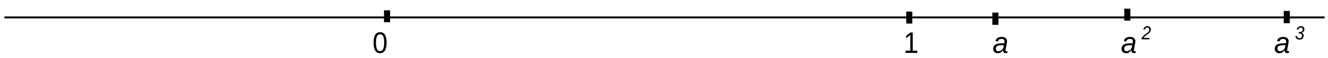
Prop 8 : $a < b$ équivaut à $b - a$ est strictement positif. $(0 < b - a)$

$a > b$ équivaut à $b - a$ est strictement négatif $(0 < b - a)$

Prop 9 : Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a < 1$.



Si $1 < a$ alors $1 < a < a^2 < a^3$.



Prop 10 : Deux réels positifs sont dans le même ordre que leurs carrés.

Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$.

Deux réels négatifs sont dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.

Prop 11 : Deux réels de même signe sont dans l'ordre inverse de leurs inverses

Si $0 < a < b$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Si $a < b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

1. COMPARAISON

Ex 1 : Ranger par ordre croissant les rationnels suivants: $\frac{31}{30}; \frac{28}{31}; \frac{30}{31}; \frac{31}{29}; \frac{31}{28}; \frac{29}{31}$.

Ex 2 : Comparer les nombres réels suivants: π; $3+\frac{7}{60}+\frac{1}{120}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; $\sqrt{10}$; $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}$; $\frac{62832}{20000}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Ex 3 : a. Comparer les deux nombres $\sqrt{5}$ et $\frac{4870847}{2178309}$.

b. Comparer les deux nombres $\frac{228826127}{102334155}$ et $\frac{1568397607}{701408733}$.

Ex 4 : 90 page 17 distances de planètes au soleil.

2. ORDRE ET OPERATIONS

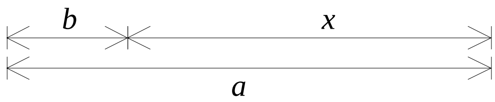
Ex 5 : Les deux réels a et b sont connus par un encadrement : $10 < a < 12$ et $5 < b < 10$.

1. On considère un rectangle dont les dimensions sont a et b en cm :

a. Donner un encadrement du périmètre de ce rectangle.

b. Donner un encadrement de l'aire de ce rectangle.

2. Donner un encadrement de x sur la figure ci - dessous:



3. On considère un rectangle dont l'aire est égale à a et dont la longueur d'un côté est b.
Donner un encadrement de la longueur x de l'autre côté.

Ex 6 : 1. Sachant que $-3 \le x \le 4$ et $-5 \le y \le 2$. donner un encadrement de $x.y$.

Ex 7 : Sachent que $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$ et $1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$,

1. Donner le meilleur encadrement de : **a)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; **c)** $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$.
Quel est le nombre de décimales exactes obtenues?

b. Trouver le meilleur encadrement de A = $\frac{3(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{2}$.

Ex 8 : Pour comparer a, a^2 et a^3, étudier le signe des différences a^2-a et a^3-a^2.

Ex 9 : 1. a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$.

a) Comparer les réels a^2 et b^2. **b)** Comparer les réels $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

2. a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$.

a) Comparer les réels a^2 et b^2. **b)** Comparer les réels $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

Ex 10 : Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et $1{,}51 < r < 1{,}52$ donner le meilleur encadrement du volume de la sphère de rayon r.

Ex 11 : 1. Sans calculatrice, prouver que $33 < \sqrt{1117} < 34$.

2. Comparer A = $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ et B = $\sqrt{5-\sqrt{3}}$.

Approximations du nombre π au cours de l'histoire :

π = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628 . . .

Babylone (- 2000) : $3+\frac{7}{60}+\frac{1}{120}=3{,}125$ ($2*10^{-2}$)

Papyrus Rhind (- 1650) : $3+\frac{18}{81}=3{,}\overline{2}$ ($8*10^{-2}$)

Archimède (- 287 ; - 212) : $\frac{22}{7}=3{,}\overline{142857}$ ($2*10^{-3}$)

Chine (250) : $\sqrt{10}\approx 3{,}16227766$ ($3*10^{-2}$)

Chine (500) : $\frac{355}{113}\approx 3{,}14159292$ ($3*10^{-7}$)

Al Khwarismi (788 ; 850) : $\frac{62832}{20000}=3{,}1416$ ($8*10^{-6}$)

France (XVIII ème) : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}14626437$ ($5*10^{-3}$)

Ramanujan (Inde XX ème) : $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}\approx 3{,}141640787$ ($5*10^{-5}$)