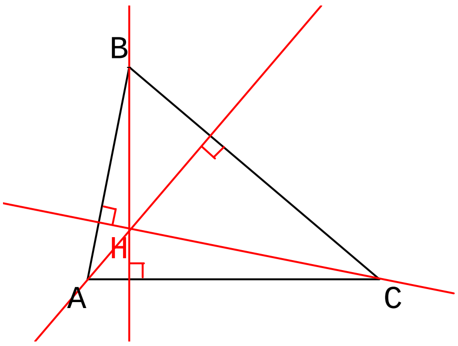
Configurations

1. *Le triangle : droites et points remarquables*

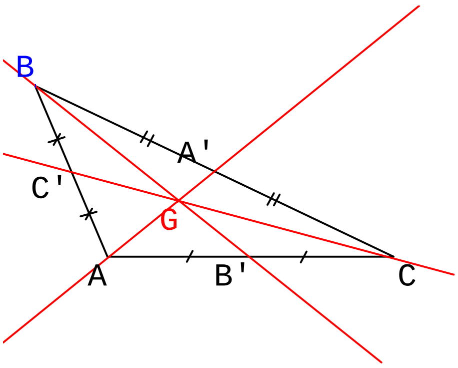
1.1 Hauteurs et orthocentre



Déf : La **hauteur** issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Prop : Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H, appelé **orthocentre** du triangle.

1.2 Médianes et centre de gravité



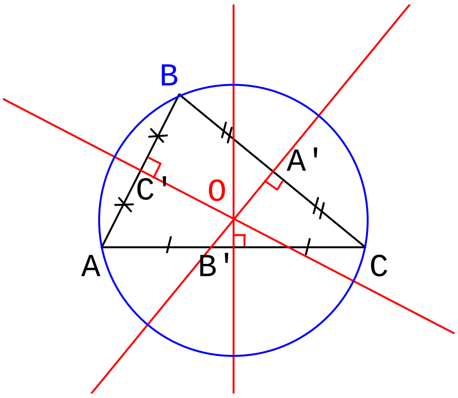
Déf : La **médiane** issue d'un sommet est la droite reliant ce sommet au milieu du côté opposé.

Prop : Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G, appelé **centre de gravité** du triangle.

G est situé au tiers à partir de la base sur chaque segment de médiane :

$GA' = \frac{1}{3}AA'$; $GB' = \frac{1}{3}BB'$; $GC' = \frac{1}{3}CC'$.

1.3 Médiatrices et centre du cercle circonscrit



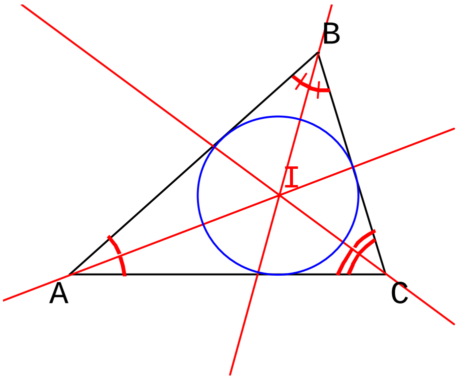
Déf 1 : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Déf 2 : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Prop : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

1.4 Bissectrices et centre du cercle inscrit



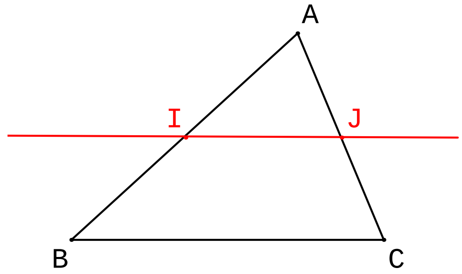
Déf : La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Prop : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I.

I est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

1.5 Théorème des milieux

Théorème : Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et a pour longueur la moitié du troisième côté.



Données : I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AC]

Conséquences : (IJ) // (BC) et $IJ = \frac{1}{2} BC$

Réciproque : La droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Données : I est le milieu de [AB] et (IJ) // ((BC).

Conséquences : J est le milieu de [AC] et $IJ = \frac{1}{2} BC$.

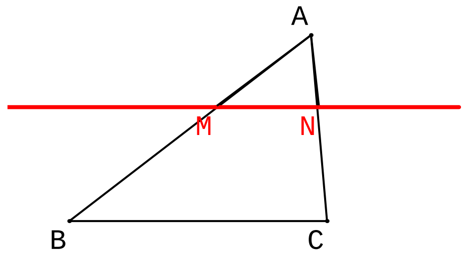
2. *Propriété de Thalès*

Théorème :

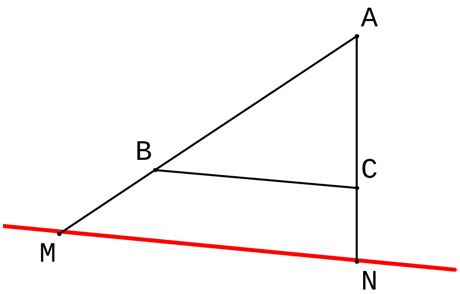
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

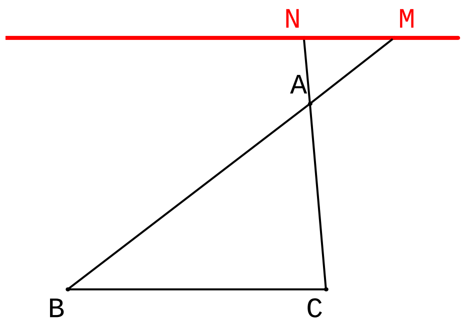
- M est un point de (AB),
- N est un point de (AC),
- Les droites ((BC) et (MN) sont parallèles

Alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



remarque : Cet énoncé est valable dans les deux situations représentées sur les figures ci - dessous :





Réciproque :

ABC et AMN sont deux triangles tels que :

- M est un point de (AB),
- N est un point de (AC),
- Les points A, M, B et A, N, C sont placés dans le même ordre.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

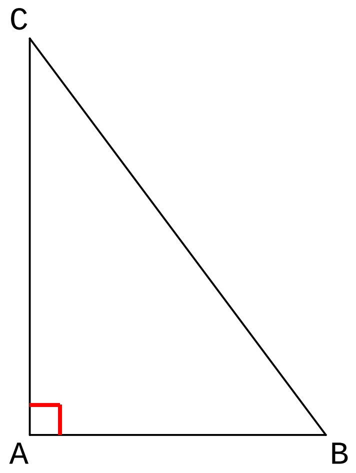
3 *Triangle rectangle*

3.1 Théorème de Pythagore

Théorème : Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Réciproque : Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

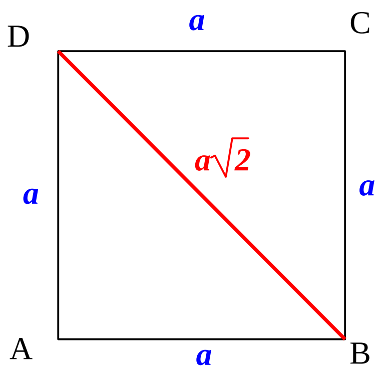
Enoncé global :
ABC est un triangle rectangle en A
si et seulement si
$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

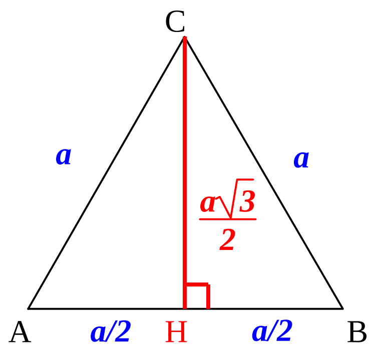


Deux résultats importants :

La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$

Une hauteur d'un triangle équilatéral de côté a a pour longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



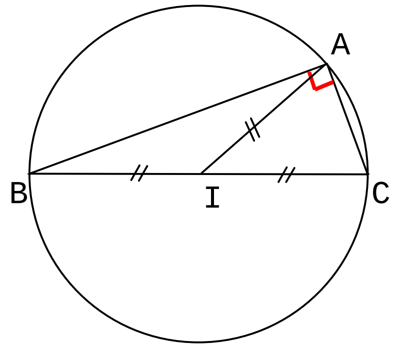


3.2 Triangle rectangle et cercle

Théorème 1 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si il est inscrit dans un demi - cercle de diamètre [BC].

Théorème 2 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la médiane AI vérifie AI = $\frac{1}{2}$BC.

Théorème 3 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le milieu I de [BC] est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



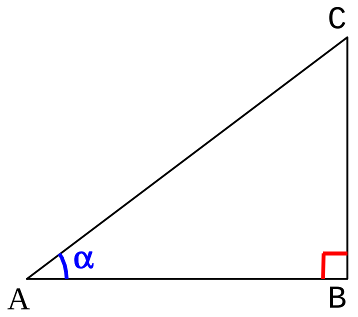
3.3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Définitions

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC};$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC};$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}.$$



Propriétés : Si α est la mesure d'un angle aigu : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Valeurs remarquables : Il est utile de connaître ces valeurs ou de savoir les retrouver.

α en degrés	30°	45°	60°
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

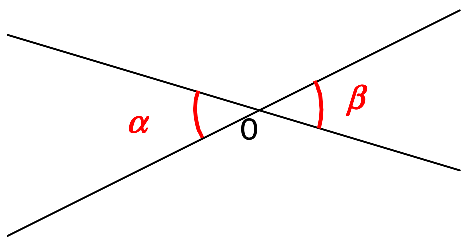
4 Angles

4.1 Somme des angles d'un triangle

Dans un triangle la somme des angles est égale à 180 degrés : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

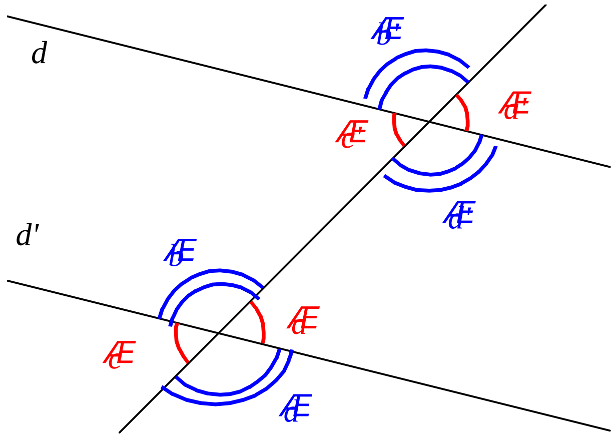
4.2 Angles opposés par le sommet

Si deux droites sont sécantes en O alors
les angles opposés par le sommet tels α et β sont égaux.



4.3 Angles alternes - internes, angles correspondants

Deux droites *d* et *d'* sont coupées par une même troisième.



Propriété 1 :
Les angles alternes - internes sont égaux.

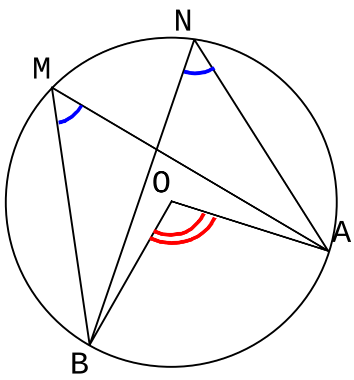
Exemples sur la figure :
$\hat{a}$ et $\hat{c}'$ sont alternes - internes donc égaux.
$\hat{b}$ et $\hat{d}'$ sont alternes - internes donc égaux.

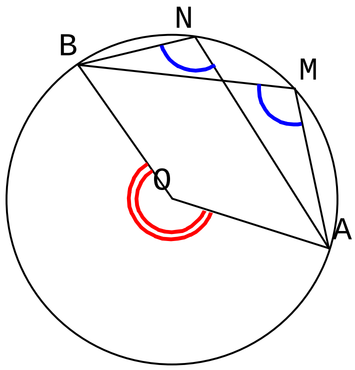
Propriété 2 :
Les angles correspondant sont égaux.

Exemples sur la figure :
$\hat{a}$ et $\hat{a}'$ sont correspondants donc égaux.
$\hat{b}$ et $\hat{b}'$ sont correspondants donc égaux.
$\hat{c}$ et $\hat{c}'$ sont correspondants donc égaux.
$\hat{d}$ et $\hat{d}'$ sont correspondants donc égaux.

4.4 Angles inscrits, angles au centre.

Propriété :
Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.





Conséquence :
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.

Exemples : Les angles inscrits $A\hat{M}B$ et $A\hat{N}B$ qui interceptent le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$ sont donc égaux à la moitié de ce dernier.

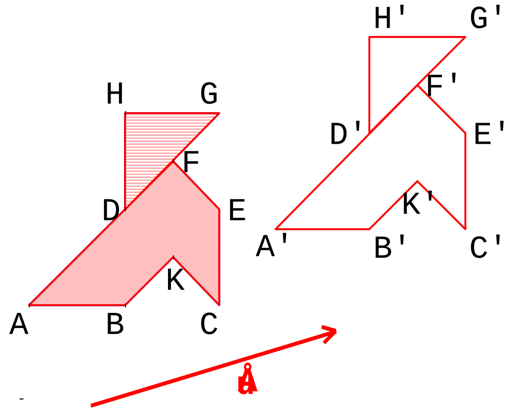
$$A\hat{M}B = A\hat{N}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

5 Transformations usuelles

5.1 Translation

Donnée : Un vecteur Å

Définition : On appelle translation de vecteur Å, la transformation du plan P vers lui - même qui à tout point M associe le point M' tel que MÄM' = Å.

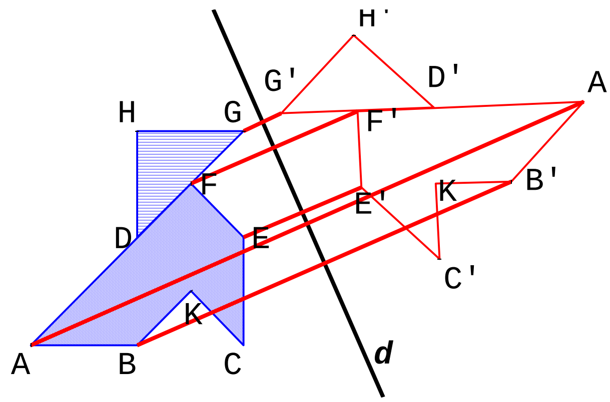


$$t_{Å} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \;:\; MÄM' = Å$$

5.2 Symétrie axiale ou réflexion

Donnée : Une droite *d*.

Définition : On appelle réflexion d'axe *d*, la transformation du plan P vers lui - même qui à tout point M associe le point M' tel que *d* soit la médiatrice de [MM'].

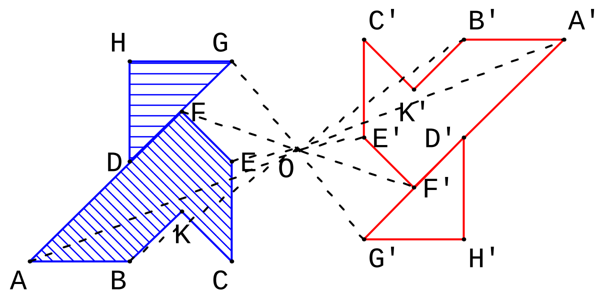


$$S_d : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \;:\; d \text{ médiatrice de } [MM']$$

5.3 Symétrie centrale

Donnée : Un point O

Définition : On appelle symétrie centrale de centre O, la transformation du plan P vers lui - même qui à tout point M associe le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].

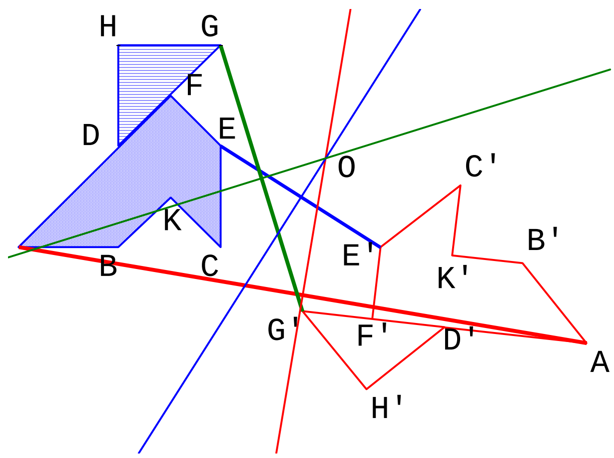


$$S_O : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \;:\; O \text{ milieu de } [MM']$$

5.4 Rotation

Donnée : Un point O et un angle α ($0° < \alpha < 180°$)

Définition : On appelle rotation de centre O et d'angle $+\alpha$, la transformation du plan P vers lui - même qui, à tout point M associe le point M' tel que OM = OM' et MÔM' = α dans le sens direct.

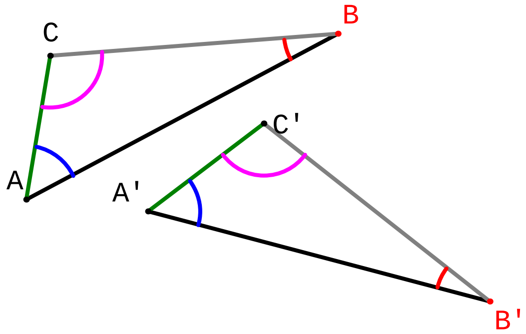


$$r_{(O,\alpha)} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M' \;:\; OM = OM'$$
$$MÔM' = \alpha$$

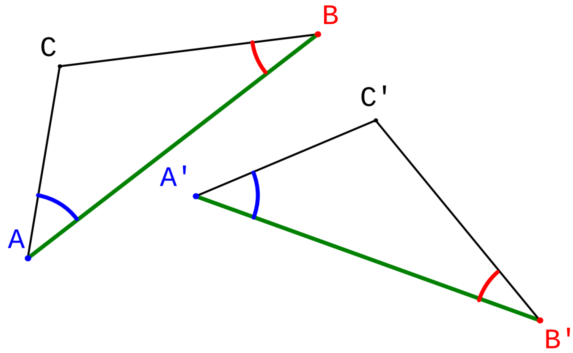
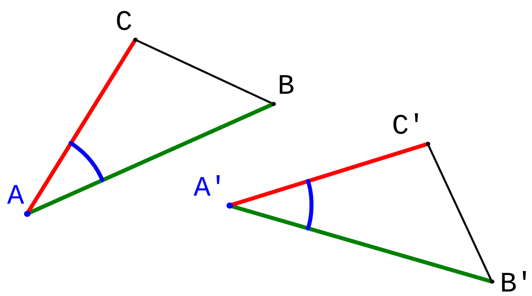
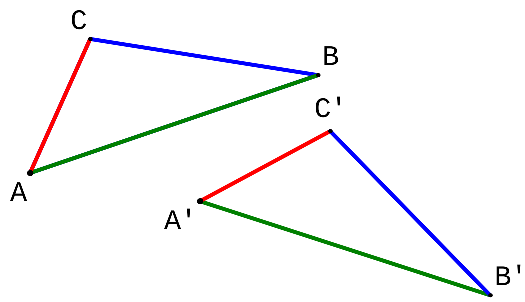
Une définition analogue existe pour le sens indirect.

6 triangles isométriques

Définition : Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs 3 côtés et leurs 3 angles sont respectivement égaux.

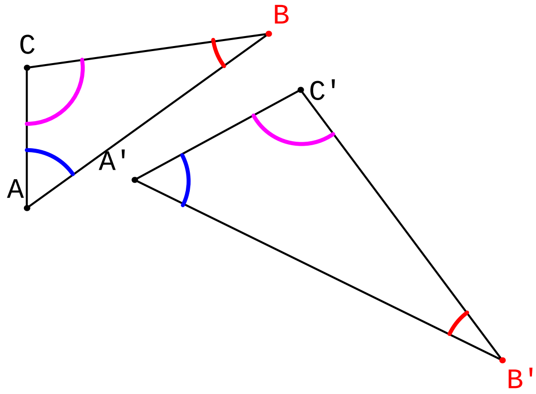


3 cas d'isométrie de triangles à connaître

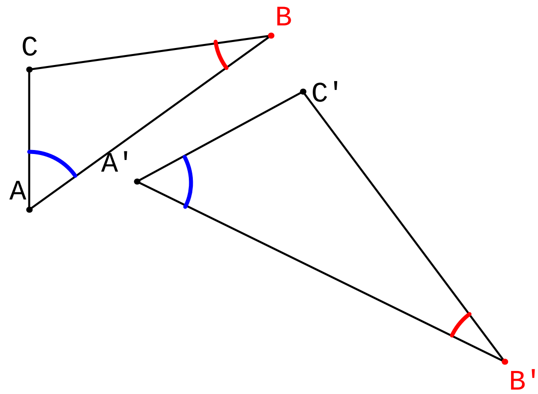
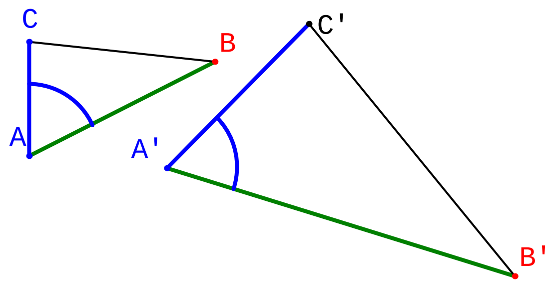
Premier cas **1 côté égal, compris entre deux angles égaux**	
Deuxième cas **1 angle égal compris entre deux côtés égaux**	
Troisième cas **3 côtés égaux**	

7 triangles semblables

Définition : Deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.



3 cas de similitude des triangles :

Premier cas **2 angles égaux**	
Deuxième cas **1 angle égal** **compris entre** **deux côtés proportionnels**	
Troisième cas **3 côtés de l'un proportionnels** **aux** **3 côtés de l'autre**