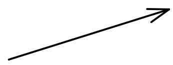
Vecteurs

1 Rappels

1.1 Qu'est ce qu'un vecteur ?

☞ . . . Un vecteur c'est ça :



- Un segment orienté noté $\overrightarrow{AB}$

☞ . . . Un vecteur c'est une direction, un sens, une longueur.

- Une direction, celle de la droite (AB)
  (toutes les droites parallèles à (AB) ont la même direction)
- Un sens, celui de A vers B.
- Une norme, la longueur du segment [AB].

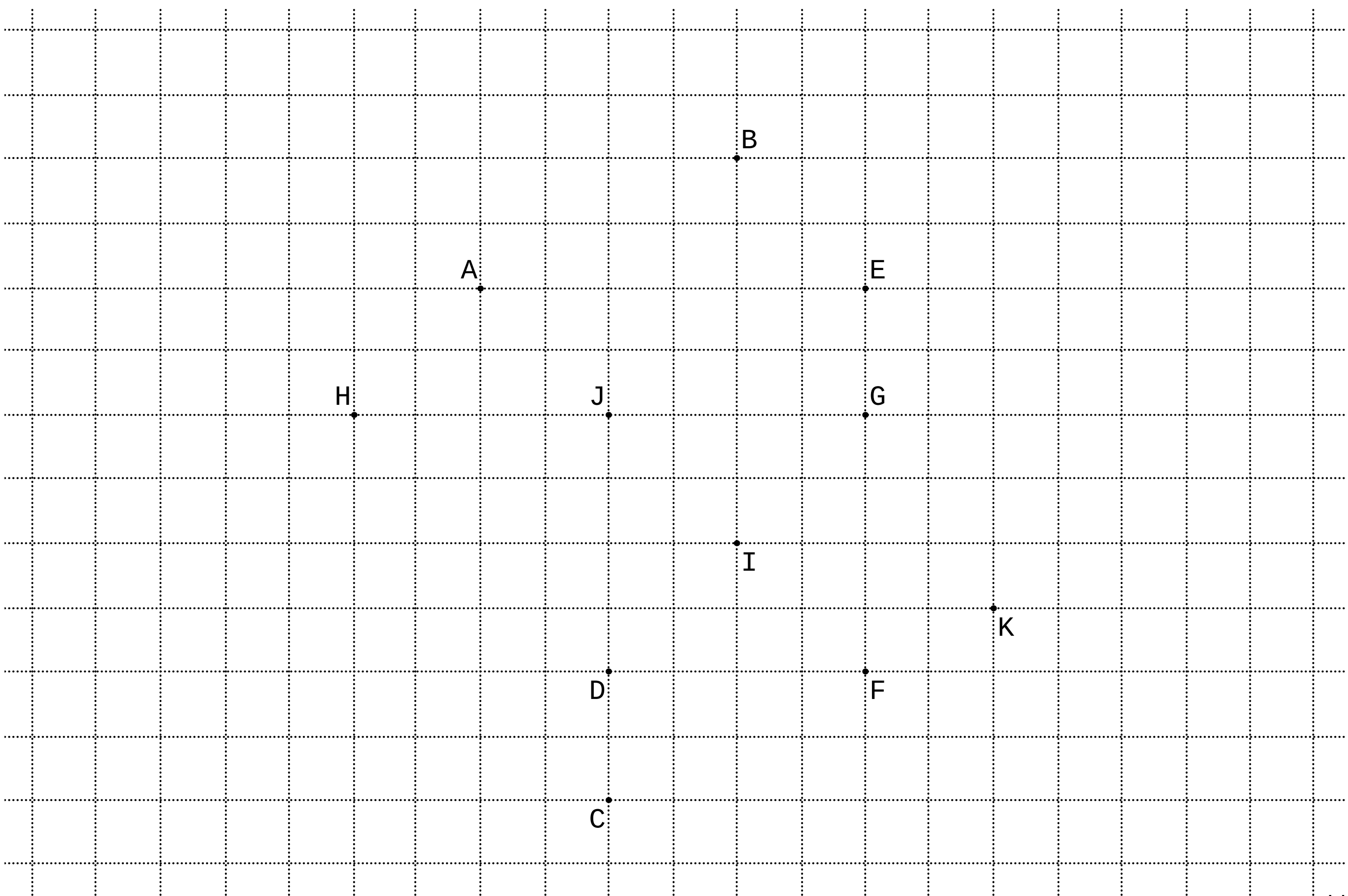
☞ . . . Un vecteur c'est une translation

- Tout le monde sait ce que veut dire "la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.2 égalité de vecteurs

Activité 1 : Observer des vecteurs sur un quadrillage.
Trouver tous les vecteurs de la figure égaux à :

a) $\overrightarrow{DF}$ **b)** $\overrightarrow{AJ}$ **c)** $\overrightarrow{FC}$ **d)** $\overrightarrow{BJ}$ **e)** $\overrightarrow{HC}$



Activité 2 : Construire

Exercice 1

Exercice 1 : (Indice bordas 1 page 204)

E, F et G sont trois points non alignés.

a) Construire, au compas, le point A tel que $\vec{EF} = \vec{GA}$.

b) Construire, à la règle graduée, le point B tel que $\vec{BG} = \vec{EF}$.

c) Que peut - on dire des points B,G et A.

Exercice 2

1. Construire à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :

$$\vec{AB} = \vec{CD} \text{ , } \vec{EA} = \vec{AB} \text{ , } \vec{CF} = \vec{BA}$$

2. Quels paralélogrammes peut - on tracer avec ces six points ?

3. En utilisant ces six points, compléter : $\vec{BD}$ = ... = ... $\vec{BC}$ = ... $\vec{BF}$ = ...

Prop 1: $\vec{AB} = \vec{CD}$ ⇔ ABDC est un parallélogramme.

Activité 3 :

vrai ou faux Exercice 3 page 204.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si $\vec{AB} = \vec{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme.

b) Si $\vec{RS} = \vec{UT}$ alors RSTU est un parallélogramme.

c) Si AB = CD et si (AB) // (CD) alors $\vec{AB} = \vec{CD}$.

d) Si I est le milieu de [AB] alors $\vec{AI} = \vec{IB}$.

e) Si $\vec{AI} = \vec{IB}$ alors B est le symétrique de A par rapport à I.

f) Si M est équidistant de A et de B alors $\vec{AM} = \vec{MB}$.

g) Si $\vec{RS} = \vec{TU}$ alors [RU] et [TS] ont le même milieu.

h) Si $\vec{RS} = \vec{TU}$ alors la translation qui transforme R en U transforme S en T.

i) Si I est le milieu de [AB] alors $\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$.

Prop 2 : Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Prop 3 : Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le même milieu.

Prop 4 : Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il est non croisé et il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Prop 5 : Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il est non croisé et il a ses côtés opposés de même longueur.

Activité 4 : Démontrer

Exercice 1 : Avec des parallélogrammes.

ABCD est un parallélogramme, CDEF est un parallélogramme.
Démontrer que ABFE est un parallélogramme.

Exercice 2 : Avec des symétriques

A, B, I, J sont quatre points distincts du plan.
C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à I.
E et F sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à J.
Faire une figure.
Démontrer que CDFE est un parallélogramme

Exercice 3 : Avec des parallèles dans un triangle.

Dessiner un triangle ABC.
(Pour simplifier les constructions ultérieures on prendra AB = 10 cm, BC = 8 cm et AC = 6 cm).

1. Construire les points B_1, B_2 et B_3 tels que $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B_3} = \overrightarrow{B_3C}$.

2. Les parallèles à la droite (AB) passant par B_1, B_2, B_3 coupent respectivement (BC) en A_1, A_2, A_3
Démontrer que $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_3C}$.

3. Les parallèles à la droite (AC) passant par A_1, A_2, A_3 coupent respectivement (AB) en C_1, C_2, C_3
Pour les mêmes raisons que précédemment, nous pouvons affirmer que : $\overrightarrow{AC_3}=\overrightarrow{C_3C_2}=\overrightarrow{C_2C_1}=\overrightarrow{C_1B}$.

4. Soient I le point commun à (A_1B_1) et (A_3C_3), J le point commun à (A_2B_2) et (A_3C_3) et K le point commun à (A_1B_1) et (A_2C_2).

a) Citer, en justifiant votre réponse, tous les vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{AB_1}$

b) Démontrer que I est le milieu de $[C_3J]$.

remarque : On démontrerait de même que J est le milieu de $[IA_3]$, K est le milieu de $[A_2C_2]$, . . .

1.3 Somme de vecteurs

Activité 5 : Exercice 1 (Indice BORDAS Exercice 2 page 204)

Tracer un parallélogramme ABCD de centre O.
Compléter les égalités en n'utilisant que des points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \ldots$

b) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \ldots$

c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{AD} = \ldots$

d) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \ldots$

e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{OB} = \ldots$

f) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{AO} = \ldots$

g) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \ldots$

h) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \ldots$

i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} = \ldots$

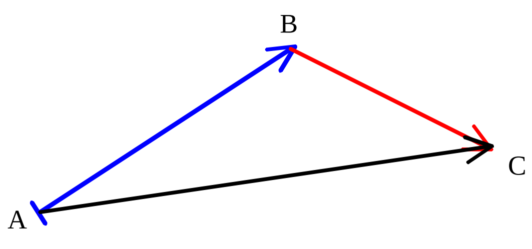
Il n'y a que deux situations pour lesquelles nous pouvons conclure facilement :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ C'est la relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est tel que ABDC est un parallélogramme règle du parallélogramme).

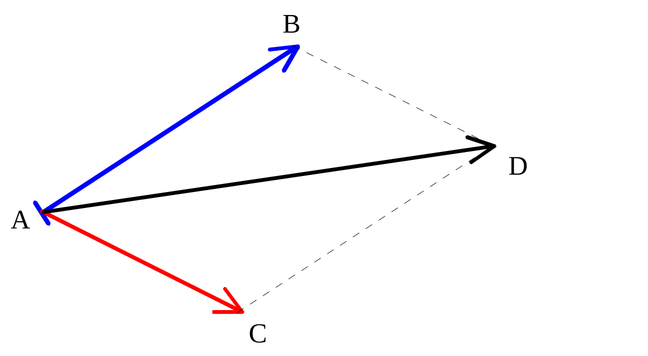
Relation de chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Règle du parallèlogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ tel que ABDC soit un parallèlogramme



Activité 5 :

Exercice 2 (Hyperbole NATHAN page 243)

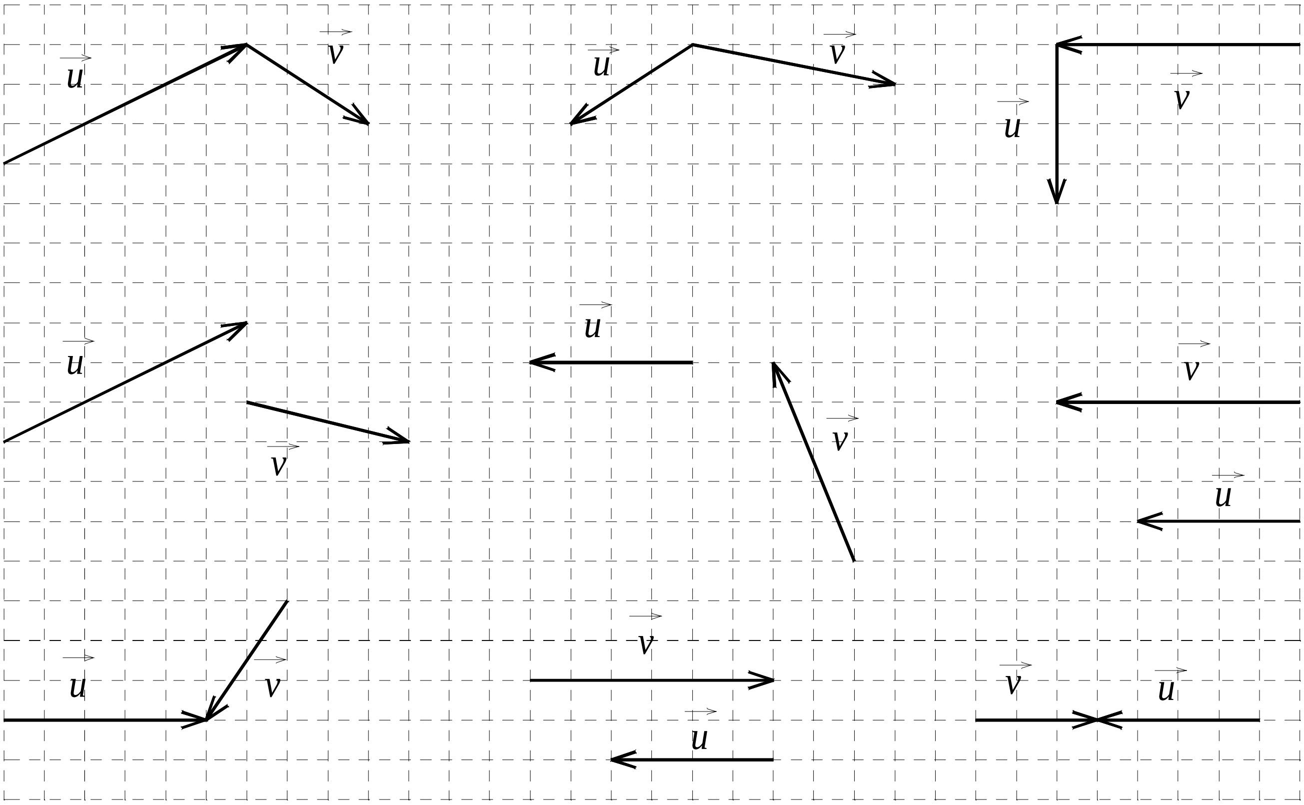
ABCD est un rectangle de centre O. Construire :

a) Le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$

b) Le point F tel que $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



2 Multiplication d'un vecteur par un réel, colinéarité

2.1 exemples

Activité 6 : Observation

1. Sur la figure de l'activité 1

a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HD}$.

2. Sur la figure de l'activité 4, compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{B_1A_1} = ... * \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{B_2A_2} = ... * \overrightarrow{B_1A_1}$ $\qquad$ $\overrightarrow{B_3A_3} = ... * \overrightarrow{B_1A_1}$.

Activité 7 : Construction

Soit A et B deux points du plan (on prendra AB = 2 cm)

1. Placer C, D, E, F, G, H, I, J définis par :

$\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EB} = -3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{HA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$.

2. Placer M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AP} = \pi\,\overrightarrow{AB}$.

Prop : Pour bien placer un point M par rapport aux points A et B il faut que le point M n'apparaisse qu'une seule fois dans l'égalité, et si possible en extrémité du vecteur :

$\overrightarrow{AM} = k * \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AM} = k * \vec{u}$

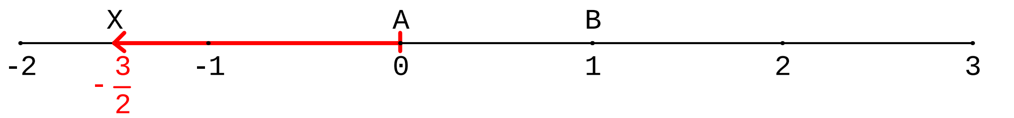
2.2 Définitions

Def 1 : $\vec{u}$ est un vecteur non nul, k est un réel non nul.
Le vecteur $\vec{v} = k * \vec{u} = k.\vec{u}$ est défini de la manière suivante :
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$
alors $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ où C est le point de la droite (AB) dont l'abscisse est k dans le repère (A,B).

$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \frac{5}{2}\vec{u}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AW} = \pi\vec{u}$

$\vec{x} = \overrightarrow{AX} = -\frac{3}{2}\vec{u}$



Prop 1 : $\vec{u}$ est un vecteur non nul, k est un réel non nul. Le vecteur $k.\vec{u}$ est le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$.
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.
- de longueur égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

Prop 2 : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k.\vec{u} = \vec{0}$

Déf 2 : Colinéarité
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Prop 3 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si $\vec{v} = k.\vec{u}$

remarque : Par extension, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs ($\vec{0} = 0.\vec{u}$).

2.3 application

Exercice : A, B et C sont trois points non alignés. Construire les points D, E, F, G et H tels que :

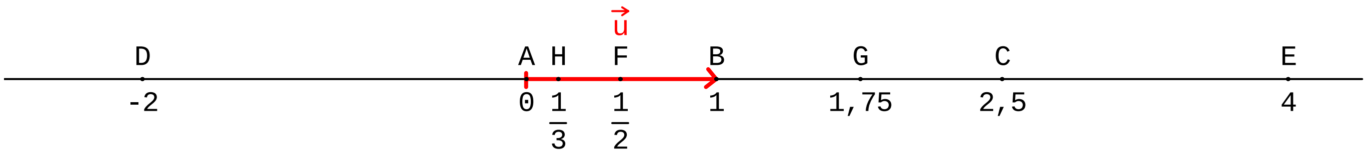
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

3 Repérage

3.1 Repérage sur une droite

O et I sont deux points distincts et quelconques sur une droite (d).
Au collège, vous avez vu que l'on pouvait considérer (O,I) comme un repère de la droite.
Au lycée, on appelle $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$. On parlera alors du repère $(O; \vec{u})$ de la droite (d)

Déf : L'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{u})$ c'est le réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}$.



$\overrightarrow{AD} = -2\vec{u}$; $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\vec{u}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{u}$; $\overrightarrow{AG} = 1{,}75\,\vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = 2{,}5\,\vec{u}$; $\overrightarrow{AE} = 4\,\vec{u}$.

3.2 Repérage dans le plan

O, I et J sont trois points distincts et non alignés du plan.
Au collège vous avez vu que (O, I, J) constitue un repère du plan.
Au lycée, on appelle $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$. On parlera du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

remarque : Comme nous utilisons du papier avec un quadrillage rectangulaire nous travaillerons la plupart du temps avec un repère orthogonal.

Activité 8 : Lien entre le repérage des points et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Partie A (feuille A fournie en annexe)

Tout le monde sait lire les coordonnées d'un point et placer un point dont on donne les coordonnées.

1. a) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.

b) Placer les points E (- 2; 3) ; F (3; 4) ; G (- 1; $-\frac{2}{3}$) ; H (1; $-\frac{5}{4}$)

2. Construire les projections A_1 et A_2 de A sur les axes de coordonnées (A_1 en abscisse et A_2 en ordonnées)

a) Quelle relation y a - t - il entre les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA_1}$?

b) Quelle relation y a - t - il entre les vecteurs $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA_2}$?

c) En déduire la relation existant entre les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Partie B

Reprendre le même exercice avec la figure B

Prop 1 : M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\iff$ $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

Activité 9 (feuille fournie en annexe)

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$; $\vec{k}$; $\vec{m}$; $\vec{n}$ dans chacune des deux situations.

2. On appelle A, le point du plan tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
a) Quelles sont les coordonnées de A ?
b) Que remarquez vous ?

3. On appelle B l'origine du vecteur représentant $\vec{v}$ et C l'extrémité de ce vecteur.
a) Quelles sont les coordonnées de B et C ?
b) Comment retrouver les coordonnées de $\vec{v}$, à partir de celles de B et C ?

Activité 10

Sur une feuille quadrillée 5 * 5, placer un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ au centre de la feuille en prenant une unité de 3 carreaux en abscisses et de deux carreaux en ordonnée.

1. Construire les vecteurs $\vec{u} = 2.\vec{i} + 3.\vec{j}$; $\vec{v} = -2.\vec{i} + 2.\vec{j}$; $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$.

2. Construire les vecteurs $\vec{q}\,(2; -3)$; $\vec{r}\,(0; -4)$; $\vec{s}\,(-1; 0)$; $\vec{t}\,(-2; -\frac{7}{2})$.

Prop 2 : Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées.

Prop 3 : Si A a pour coordonnées ($x_A; y_A$) et si B a pour coordonnées ($x_B; y_B$) alors
① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$)
② le milieu de [AB] a pour coordonnées ($\frac{x_A + x_B}{2}$; $\frac{y_A + y_B}{2}$)
Si le repère est orthonormé alors
③ La longueur AB (ou la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercices
8 page 204 : + **d)** Déterminer les coordonnées du point commun à (AC) et (BD).
76 page 208; 59 page 206

Prop 4 : Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $(k.x; k.y)$.
Si $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

Exercice 73 page 208

3.3 Méthodes

Méth 1 : (colinéarité) Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et si $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\boldsymbol{x.y' - y.x' = 0}$.

Exercices 26 à 34 page 205

Méth 2 : Trois points distincts A, B et C sont alignés
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

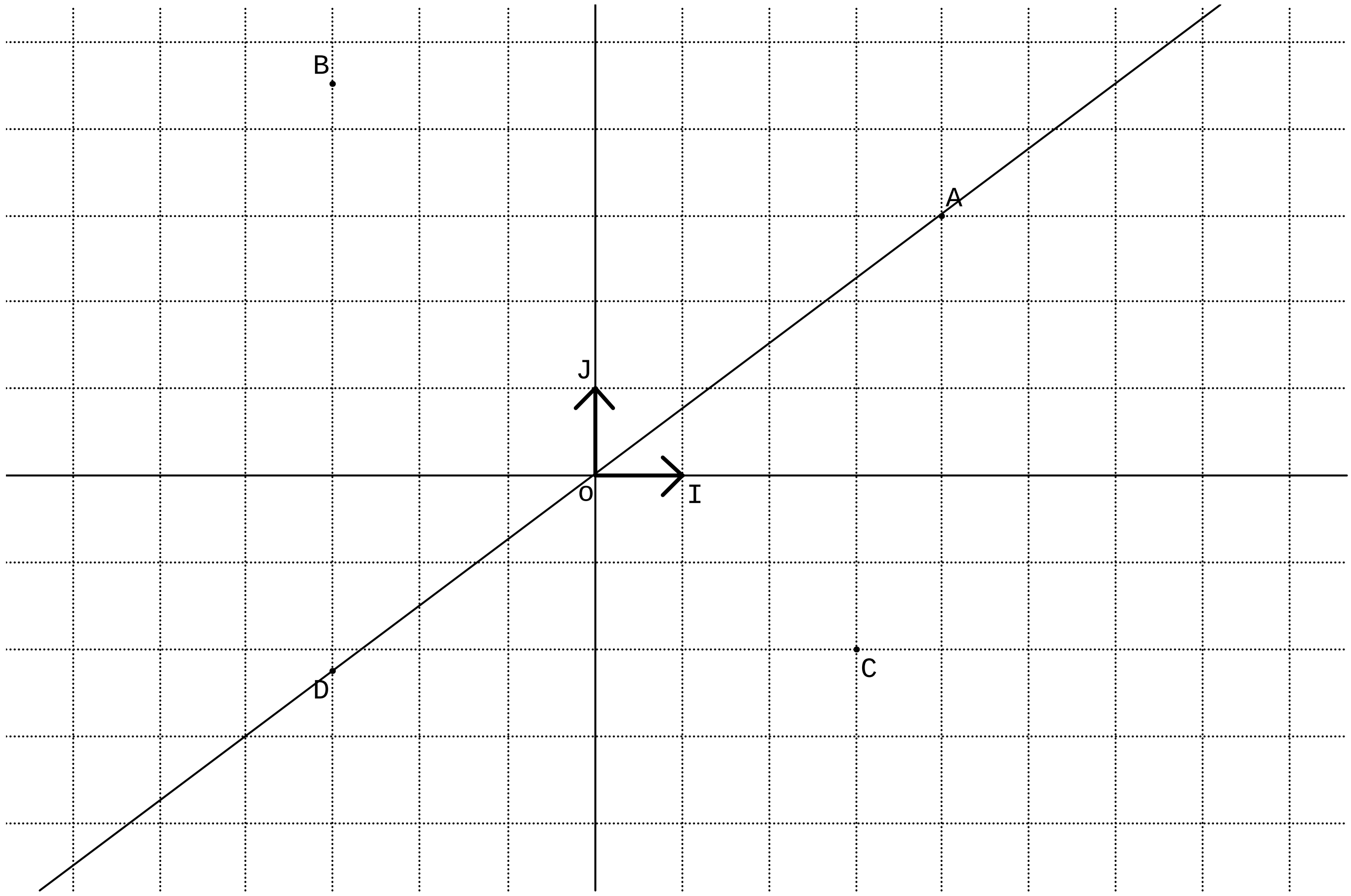
Exercices 42 à 50 page 206

Méth 3 : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

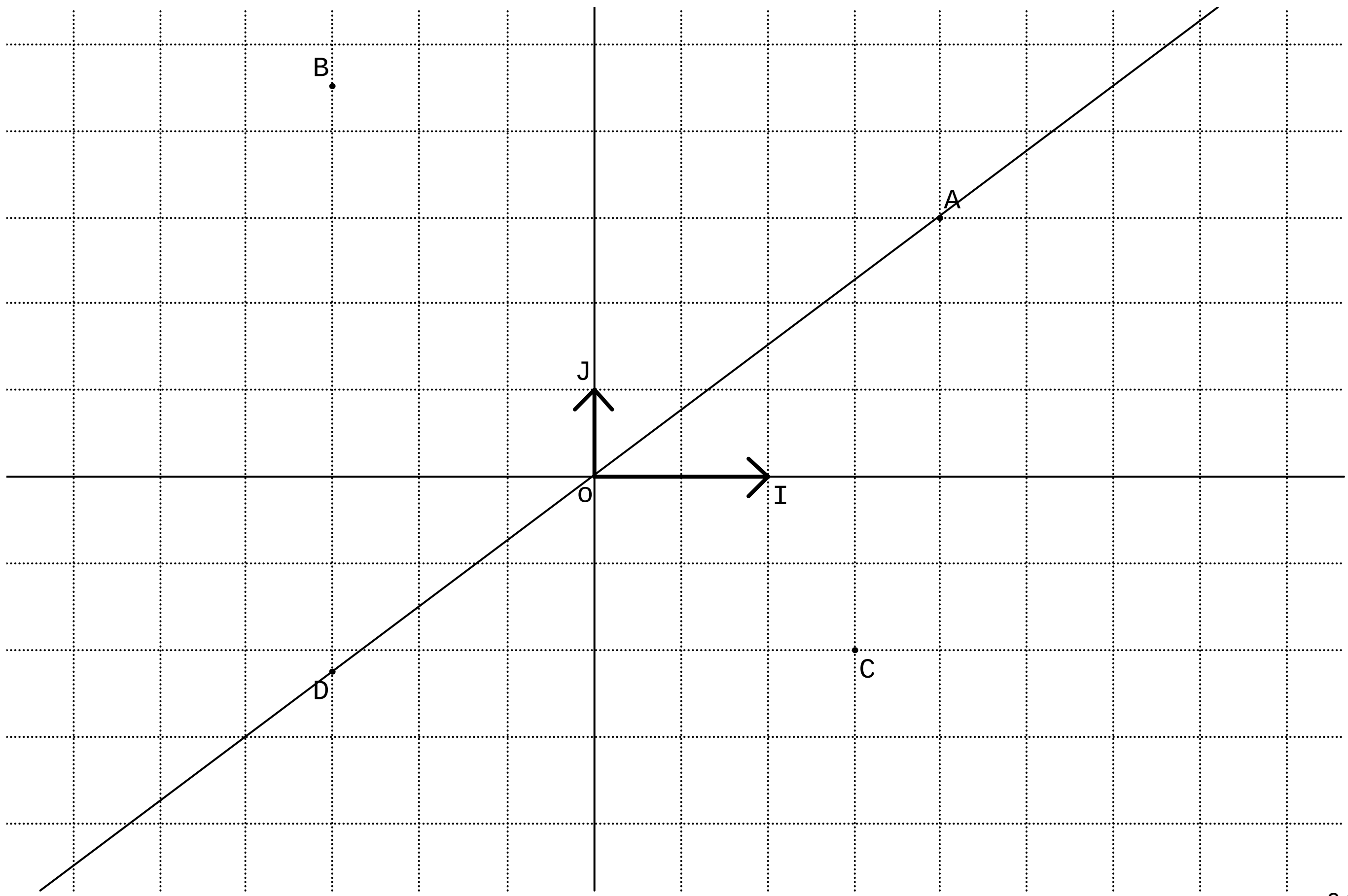
Exercice 77 page 208

3.4 Exercices de synthèse

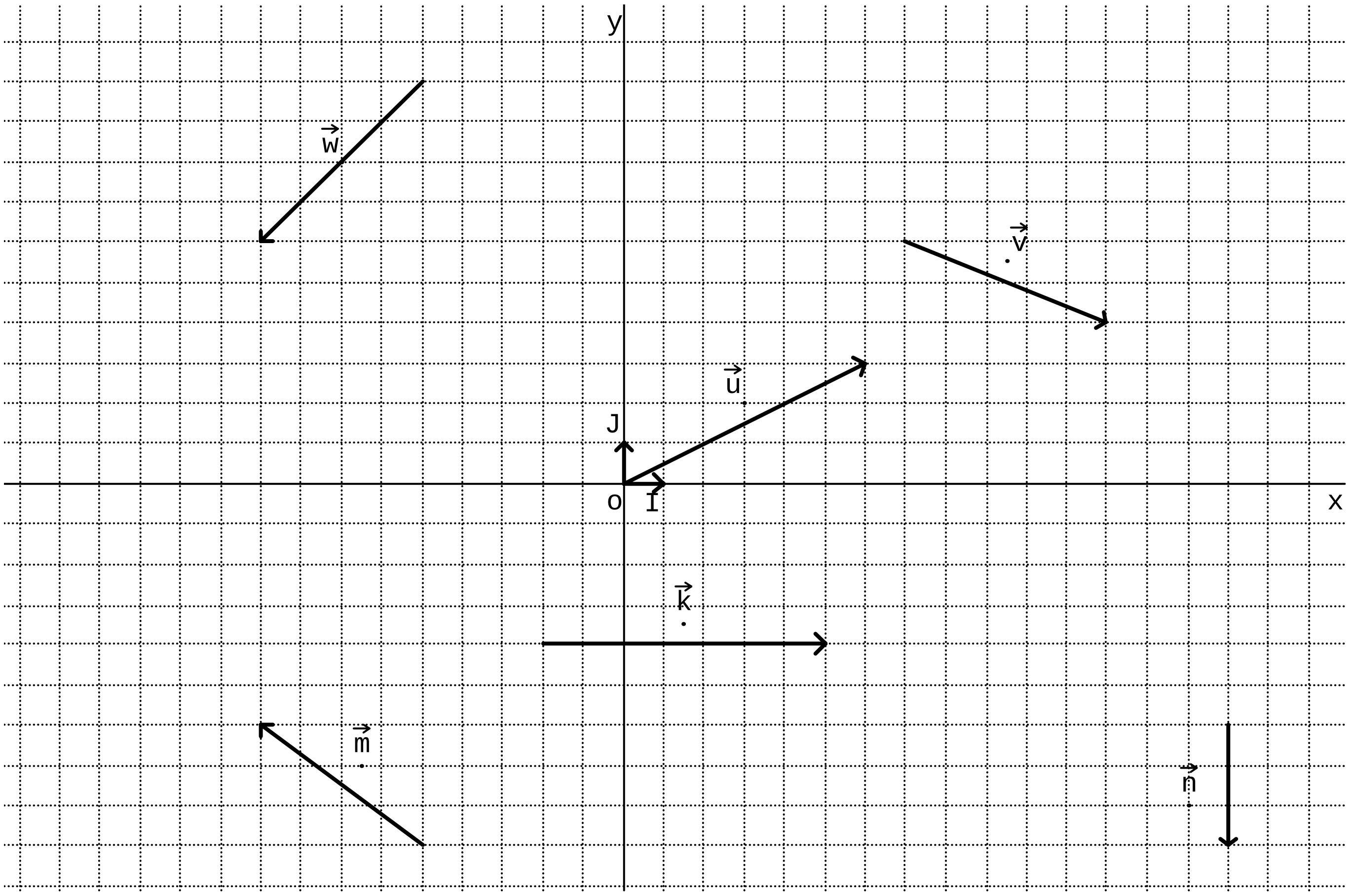
Activité 8 : Partie A



Activité 8 Partie B



Activité 9 Partie A



Activité 9 Partie B