Nombres et calculs

Objectifs : Au travers de quelques exercices nous allons évoquer les nombres et leurs propriétés.
- A quels ensembles particuliers appartiennent - ils ?
- Quelles sont les différentes formes sous lesquelles ils s'écrivent ?
- Quelles sont les méthodes de calculs attachées à chaque forme ?
- Quelle(s) représentation(s) géométrique peut - on en donner ?

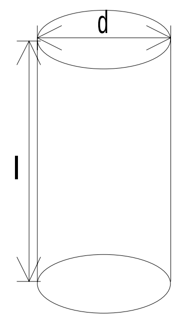
Vocabulaire :

arrondi, décimal, décimale, décomposition, écriture scientifique, irrationnel, naturel, premier, rationnel, réel, relatif, troncature, valeur approchée, valeur exacte.

3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825

Ex 1

Assimilons un fil de cuivre à un cylindre de diamètre d et de longueur l .



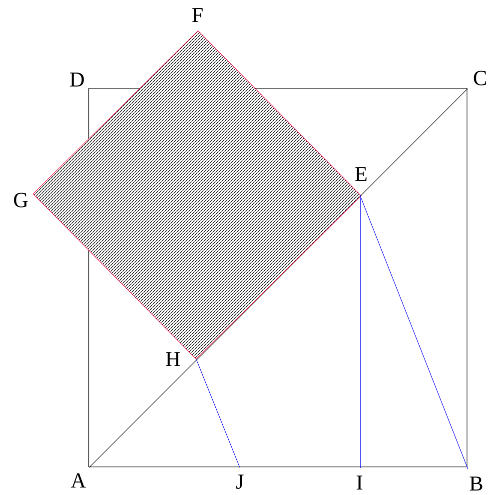
1. Rappeler la formule donnant le volume du cylindre.

2. Un fil de cuivre a un diamètre de 1 mm et une longueur de 100 m.
Quel est son volume ?

3. Avec 1l de cuivre, quelle longueur de fil de 3 mm de diamètre peut - on fabriquer ?

Ex 2

1. ABCD est un carré de 5 cm de côté.
Calculer la longueur AC.



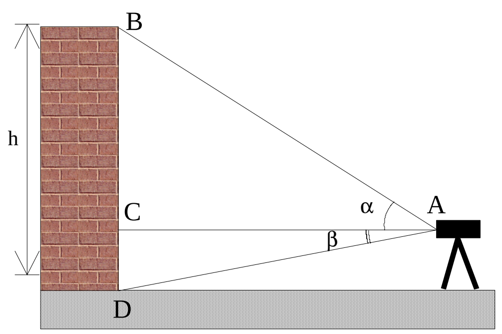
2. H et E sont les points de la diagonale [AC] tels que :
AH = CE = 2 cm.
On construit le carré EFGH comme sur la figure ci - contre.
Calculer l'aire du carré EFGH.

3. I est la projection orthogonale de E sur [AB].
Calculer la longueur AI.

4. On considère le point J de [AB] tel que les droites (EB) et (HJ) soient parallèles. Calculer la longueur AJ.

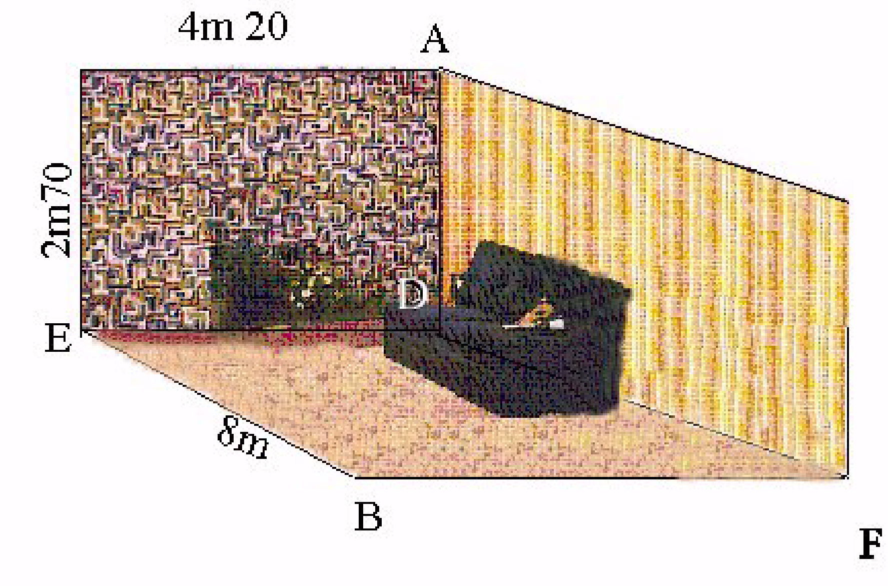
Ex 3

Un théodolite permet la mesure des angles situés dans un plan vertical à partir de l'horizontale.
L'appareil est mis en station à 64,3 m d'un immeuble.
On vise le sommet et on mesure l'angle; la mesure est α = 30 °.
On vise le pied et on mesure l'angle ; la mesure est β = 2,45°.



Quelle est la hauteur de l'immeuble ?

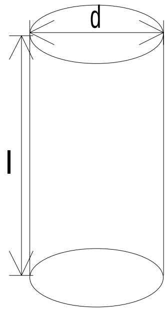
Ex 4
Un électricien dispose de trois possibilités pour joindre le point A au point B avec un fil électrique.
De A à E puis de E à B. De A à D puis de D à B. De A à F puis de F à B.
Quel chemin va t - il prendre pour économiser le fil ?



Corrigés

Ex 1

Assimilons un fil de cuivre à un cylindre de diamètre d et de longueur l .



1. Rappeler la formule donnant le volume du cylindre.

2. Un fil de cuivre a un diamètre de 1 mm et une longueur de 100 m.
Quel est son volume ?

3. Avec 1l de cuivre, quelle longueur de fil de 3 mm de diamètre peut - on fabriquer ?

---

1. Volume du cylindre : $\pi . r^2 . l$ ou $\pi \dfrac{d^2}{4} . l$

2. Si l'on choisit de travailler en mètres : d = 1 mm = 10^{-3} m ; l = 100 m = 10^2 m.

Le volume est donc égal à : $\pi \dfrac{10^{-6}}{4} * 10^2 = \dfrac{\pi}{4} * 10^{-4} \approx 0{,}785 * 10^{-4} \approx 7{,}85 * 10^{-5}$ m^3.

Si l'on choisit de travailler en milimètres : d = 1 mm ; l = 10^5 mm.

Le volume est alors égal à : $\pi \dfrac{1}{4} 10^5 \approx 7{,}85 * 10^4$ mm^3.

remarque : en dm^3 (en l) : V = $7{,}85 * 10^{-2}$ l .
en cm^3 : V = 78,54 cm^3.

3. Cette fois on donne V = 1 l = 1 dm^3 et l'on connait d = 3 mm = $3 * 10^{-2}$ dm.

donc on peut écrire l'équation $1 = \pi \dfrac{9 * 10^{-4}}{4} . l$ ou encore $1 = \dfrac{9\pi}{4} * 10^{-4} . l$.

On en déduit l = $\dfrac{4}{9\pi} * 10^4 \approx 1414{,}710605$ dm $\approx 141{,}47$ m.

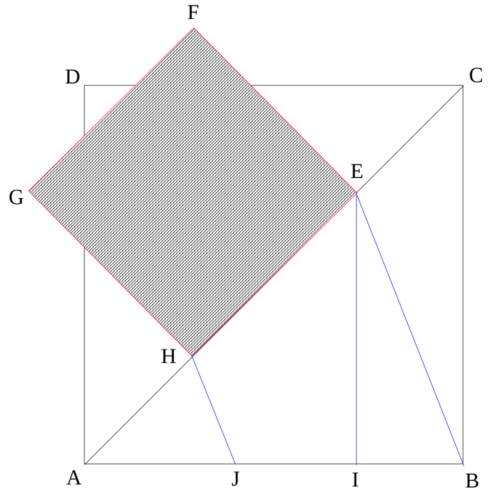
Ex 2

1. ABCD est un carré de 5 cm de côté.
Calculer la longueur AC.

2. H et E sont les points de la diagonale [AC] tels que :
AH = CE = 2 cm.
On construit le carré EFGH comme sur la figure ci - contre.
Calculer l'aire du carré EFGH.

3. I est la projection orthogonale de E sur [AB].
Calculer la longueur AI.

4. On considère le point J de [AB] tel que les droites (EB) et (HJ) soient parallèles. Calculer la longueur AJ.



---

1. AC est la diagonale d'un carré de 5 cm de côté donc AC = $5\sqrt{2}$.

2. EH = $5\sqrt{2} - 4$ donc l'aire du carré est égale à $(5\sqrt{2} - 4)^2 = 25*2 + 16 - 2*4*5\sqrt{2} = 66 - 40\sqrt{2}$.

3. On applique la propriété de Thalès dans le triangle ABC avec (EI) // (BC) :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ donc } \frac{AI}{5} = \frac{5\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}} \text{ d'où } AI = \frac{5\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{2}-2)\sqrt{2}}{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{10-2\sqrt{2}}{2} = 5 - \sqrt{2}.$$

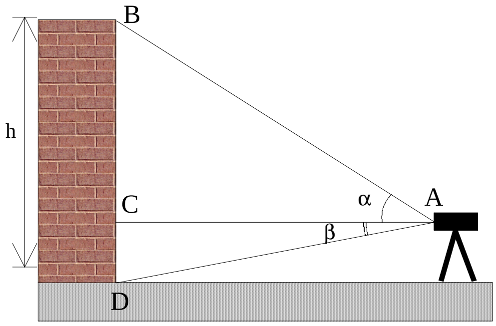
4. On applique la propriété de Thalès dans le triangle AEB avec (HJ) // (EB) :

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{AH}{AE} \text{ donc } \frac{AJ}{5} = \frac{2}{5\sqrt{2}-2} \text{ d'où } AJ = \frac{10}{5\sqrt{2}-2} = \frac{10(5\sqrt{2}+2)}{(5\sqrt{2}-2)(5\sqrt{2}+2)} = \frac{10(5\sqrt{2}+2)}{50-4} = \frac{25\sqrt{2}+10}{23}.$$

<u>Ex 3</u>

Un théodolite permet la mesure des angles situés dans un plan vertical à partir de l'horizontale.
L'appareil est mis en station à 64,3 m d'un immeuble.
On vise le sommet et on mesure l'angle; la mesure est $\alpha = 30$ °.
On vise le pied et on mesure l'angle ; la mesure est $\beta = 2{,}45$°.

Quelle est la hauteur de l'immeuble ?



AC = 64,3 m ; $\widehat{CAB}$ = 30° ; $\widehat{CAD}$ = 2,45°.

On applique la trigonométrie dans les triangle rectangle :

Triangle ABC : tan $\widehat{CAB}$ = tan 30° = $\dfrac{BC}{AC}$ donc BC = AC * tan 30°.

Traingle ADC : tan $\widehat{CAD}$ = tan 2,45° = $\dfrac{CD}{CA}$ donc CD = AC * tan2,45°.

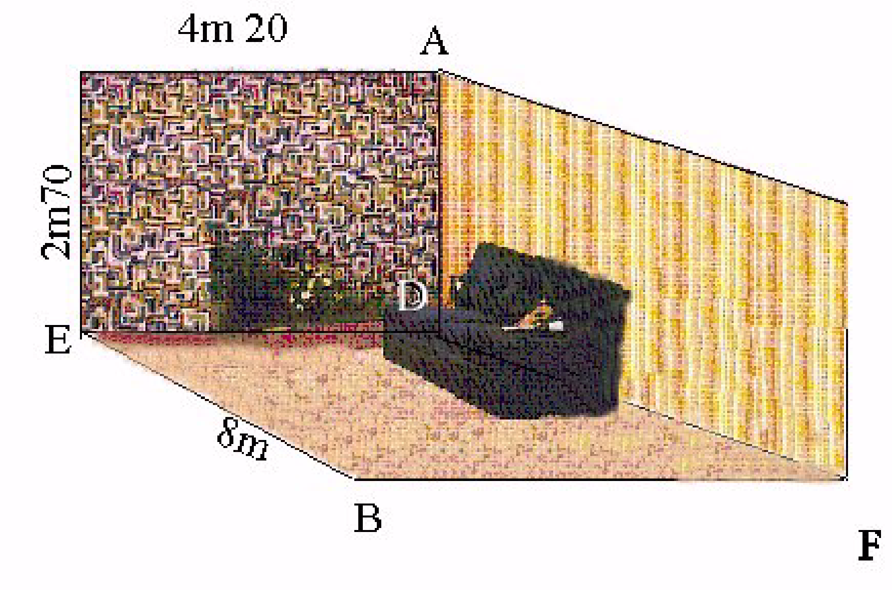
On en déduit BD = BC + CD = AC (tan 30° + tan2,45°) ≈ 64,3(0,57735 + 0,042786) ≈ 39,9 m.

L'immeuble a une hauteur de 39,9 mètres.

Ex4 :

" Le plus court circuit "

Un électricien dispose de trois possibilités pour joindre le point A au point B avec un fil électrique.
De A à E puis de E à B. De A à D puis de D à B. De A à F puis de F à B.
Quel chemin va t - il prendre pour économiser le fil ?



AE + EB :

EA est la diagonale d'un rectangle de côtés 2,7 et 4,2 : EA = $\sqrt{2,7^2 + 4,2^2} = \sqrt{24,93} \approx 4,99$.
On en déduit que AE + EB $\approx$ 4,99 + 8 $\approx$ 12,99 m

AD + DB :

BD est la diagonale d'un rectangle de côtés 8 et 4,2 : BD = $\sqrt{8^2 + 4,2^2} = \sqrt{81,64} \approx 9,04$
On en déduit que AD + DB $\approx$ 2,7 + 9,04 $\approx$ 11,74m.

BF + FA :

FA est la diagonale d'un rectangle de côtés 8 et 2,7 : FA = $\sqrt{8^2 + 2,7^2} = \sqrt{71,29} \approx 8,44$.
On en déduit que BF + FA $\approx$ 4,2 + 8,44 $\approx$ 12,64m.

Le plus court chemin est donc de A àD puis de D à B.