Détermination de la section

1. a) Prouvons que C, A et E sont des points du plan (IJG)

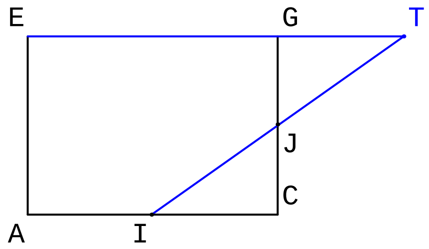
J est le milieu de [CG] donc C est un point de la droite (JG). C est donc dans le plan (IJG).
I est le milieu de [AC] donc A est un point de la droite (IC). A est donc dans le plan (ICG) = (IJG).
(AE) est parallèle à (CG) donc E est dans le plan (ACG) = (IJG).

b) En déduire que les droites (IJ) et (EG) sont sécantes en un point T, dont on précisera la position sur la droite (EG).

D'après le a) les droites (IJ) et (EG) sont coplanaires donc parallèles ou sécantes. Si elles étaient parallèles on aurait J confondu avec C donc elles sont sécantes.

Dans le plan (IJG).

figure 1



Nous savons que (IC)//(GT); G $\in$ (JC) et T $\in$ (JI).
Nous pouvons appliquer la propriété de Thalès dans la configuration IJCGT et écrire : $\frac{JC}{JG} = \frac{JI}{JT} = \frac{IC}{GT}$.

Comme J est le milieu de [CG] alors $\frac{JC}{JG} = 1$ donc JI = JT.

J est donc le milieu de [GC].

Nous en déduisons que ICTG est un parallélogramme et que $\vec{IC} = \vec{GT}$

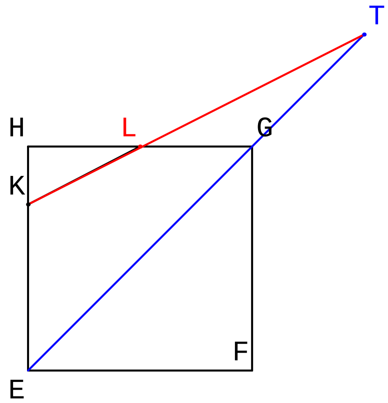
Or ACGE est un rectangle donc $\vec{AC} = \vec{EG}$ et I est le milieu de [AC] donc $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{EG}$

Nous pouvons alors écrire $\vec{ET} = \vec{EG} + \vec{GT} = \frac{3}{2}\vec{EG}$.

2. a) Dans le plan (EFG) nous retrouvons les points K et T du plan (IJK)

b) Nous en déduisons que le plan (IJK) coupe l'arête [GH] au point L commun à (GH) et (KT).

figure 2



$\vec{ET} = \frac{3}{2}\vec{EG} \Leftrightarrow 2\vec{ET} = 3\vec{ET} + 3\vec{TG} \Leftrightarrow -\vec{TE} + 3\vec{TG} = \vec{0}$

donc T est le barycentre du système {(E; - 1); (G;3)}.

$\vec{EK} = \frac{3}{4}\vec{EH} \Leftrightarrow 4\vec{EK} = 3\vec{EK} + 3\vec{KH} \Leftrightarrow \vec{KE} + 3\vec{KH} = \vec{0}$

donc K est le barycentre du système {(E;1); (H;3)}.

▶ Si nous considérons le point X barycentre du système {(E; - 1); (G;3); (E;1); (H;3)} alors la propriété d'associativité nous permet d'écrire que X est la barycentre du système {(T;2); (K;4)} donc X $\in$ (TK).

▶ Si nous considérons le point X barycentre du système {(E; - 1); (G;3); (E;1); (H;3)} alors la propriété d'associativité nous permet d'écrire que X est la barycentre du système {(T;2); (K;4)} donc X $\in$ (TK).

▶ D'autre part l'association {(E;1); (E; - 1)} fait disparaître le point E et X est le barycentre du système {(G;3); (H;3)} donc X est le milieu de [GH] et X $\in$ (GH).

■ Nous en déduisons que le milieu de [GH] est le point d'intersection des droites (GH) et (KT).
donc L est le milieu de [GH]

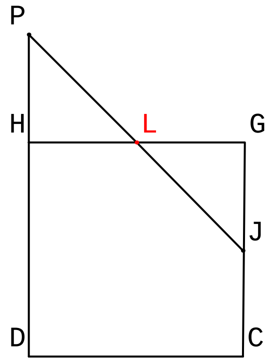
c) La trace du plan (IJK) sur la face EFGH est donc le segment [KL].

3. a) les droites (d) et (KL) sont parallèles car elles sont les intersections du plan (IJK) avec deux plans parallèles (les plans des faces supérieure et inférieure du cube).

b) La trace du plan (IJK) sur la face ABCD est donc le segment [MN].

c) Position de N sur [AD].
Pour cela, introduisons le point P, intersection des droites (DH) et (LJ) dans le plan (DCG).

figure 3



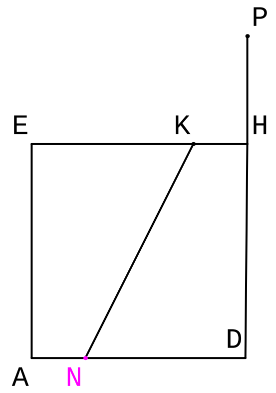
Sachant que L est le milieu de [HG] et que (PH)//(GJ), nous retrouvons la même configuration de Thalès qu'à la question 1.b)

Nous prouvons de la même manière que $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DH}$

ou que $\overrightarrow{PH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$

Si nous considérons le plan (ADH),
pourquoi les points N, K et P sont - ils alignés ?

figure 4

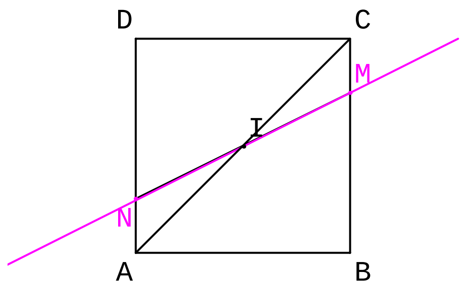


▶ P étant sur la droite (LJ), il appartient au plan (IJK).
P étant sur la droite (DH), il appartient au plan (ADH).
donc P est un point commun aux plans (IJK) et (ADH).
▶ Comme la droite d'intersection des plans (IJK) et (ADH) est la droite (NK), nous en déduisons que P est un point de la droite (NK).
■ Nous pouvons dès lors appliquer la propriété de Thalès dans le triangle (PDN) avec
(KH)//(DN); H $\in$ (PD) et K $\in$ (PN).
Si $\overrightarrow{PH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$ alors $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DN}$

donc $\overrightarrow{DN} = 3\,\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ ou encore $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Position de M sur [BC]
Sur la face ABCD , I est le milieu de [AC] .
Nous savons que (AN)//(CM); I $\in$ (AC) et I $\in$ (MN);
donc d'après la propriété de Thalès

figure 5



$\frac{IA}{IC} = \frac{IN}{IM} = \frac{AN}{CM} = 1$ donc I est le milieu de[MN].
Nous en déduisons que ANCM est un parallélogramme donc
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ d'où $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

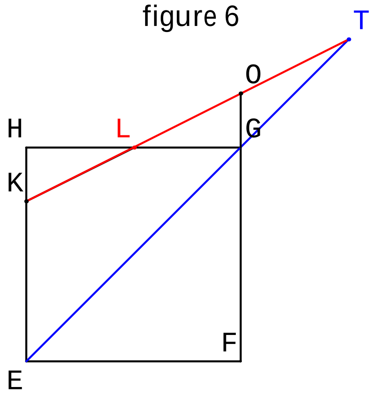
4. La section du cube par le plan (IJK) est le polygone JLKNM.

Construction de la section en vrai grandeur

1. Les droites (KL), (JM) et (FG) sont concourantes en un point O tel que OG = $\frac{1}{4}$ EH.

Sur la face supérieure les droites (FG) et (KL) sont sécantes en un point O. (i)
Sur la face de droite les droites (FG) et (JM) sont sécantes en un point O '. (ii)
Mais pourquoi a - t - on O = O ' ?
Parce que (KL) et (JM) sont deux droites du plan (IJK) et donc
▶ (i) permet de dire que la droite (FG) coupe le plan (IJK) en O .
▶ (ii) permet de dire que la droite (FG) coupe le plan (IJK) en O '.
■ d'où O = O '.

figure 6



Pour prouver que $OG = \frac{1}{4}EH$, il suffit de travailler sur la face supérieure et d'appliquer la propriété de Thalès.

(KO) et (HG) sont sécantes en L et (HK)//(OG)

donc $\frac{LH}{LG} = \frac{LK}{LO} = \frac{HK}{OG} = 1$ car L est le milieu de [HG].

Nous en déduisons que $OG = HK = \frac{1}{4}EH$.

2. b) En déduire que L est le milieu de [OK]

La démonstration au dessus permet aussi de déduire que L est le milieu de [OK].

c) En déduire que J est le milieu de [OM]

On retrouve dans le plan BCG une configuration identique à la précédente qui permet donc de prouver que J est le milieu de [OM].

a) En déduire que (KOMN) est un losange

(KO) et (MN) sont deux droites parallèles car ce sont les intersections du plan (IJK) avec deux plans parallèles. Il en est de même pour (KN) et (OM). Nous avons donc un parallélogramme.
Pour prouver qu'il s'agit d'un losange, il suffit de prouver que deux côtés consécutifs ont la même longueur. Choisissons de prouver que KO = OM en prouvant que OL = OJ.

- Calcul de OL : Il suffit d'appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle OLG rectangle en G

$$LO = \sqrt{LG^2 + GO^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{5}$$ (a représente le côté du cube)

- Calcul de OJ : Il suffit d'appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle OJG rectangle en G

$$JO = \sqrt{JG^2 + GO^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{5}.$$

On a donc OL = OG d'où le résultat cherché. KOMN est bien un losange.

d) En déduire que KM = BG

Nous savons que $\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$ et que $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Comme $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$

nous en déduisons que $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{MC}$ donc que KHCM est un parallélogramme; d'où KM = HC.
HC étant une diagonale d'une face du cube, ainsi que BG, nous avons HC = BG.
Conclusion : KM = BG.

En déduire que KN = BJ

- KOMN est un losange donc $KN = OM = 2\,OJ = a\frac{\sqrt{5}}{2}$
- Calcul de BJ : Il suffit d'appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle BJC rectangle en C

$$BJ = \sqrt{BC^2 + CJ^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

On en déduit KN = BJ.

3. Construction en vraie grandeur

- KM est égal à la diagonale d'une face donc nous traçons un carré de diagonale KM.
- Dans le losange KN = KO = MO = MN = BJ où J est le milieu d'un côté du carré et B un sommet de la face opposée. Il suffit alors de reporter cette longueur à partir des points K et M pour obtenir les points O et N.