

Présentation informelle de la construction des nombres ordinaux transfinis (ou ordinaux)

- On part de 0, le plus petit des ordinaux
- Tout ordinal a un successeur qui lui est supérieur
- Pour tout ensemble d'ordinaux, il existe des ordinaux strictement supérieurs à tous les ordinaux de cet ensemble, et parmi ceux-ci il en existe un qui est plus petit que les autres

Considérons par exemple l'ensemble des ordinaux que l'on peut obtenir en prenant un certain nombre de fois le successeur de 0. Cet ensemble peut être identifié à l'ensemble des nombres entiers naturels \mathbb{N} . Le plus petit ordinal strictement supérieur à tous ces ordinaux est appelé ω .

Présentation informelle

” Pour passer aux ordinaux, on va inventer un nouveau truc après les entiers naturels (” après” = plus grand qu’eux) et on va l’appeler ω (” oméga”). Ne cherchons pas encore à comprendre ce que cela signifie exactement, admettons juste l’idée qu’on place un nouvel objet à la fin, l’ordinal ω , et que ce nom est arbitraire. L’idée générale est qu’à chaque fois qu’on a fabriqué les ordinaux jusqu’à un certain point, on en ajoute un nouveau à la fin (auquel il faudra éventuellement inventer un nom). Après tous les entiers naturels, on place donc l’ordinal ω . Après cet ajout, il faut de nouveau inventer un nouvel ordinal, qui sera le successeur de ω , et on va l’appeler $\omega+1$. Puis un nouveau, $\omega+2$, et ainsi de suite. À ce stade-là du processus de fabrication des ordinaux, on a les entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, et ensuite les ordinaux $\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots$ ”

David Madore, Nombres ordinaux : une (longue) introduction

Un exemple de notation

Notation basée sur la logique combinatoire et le lambda-calcul: $f x$
= résultat de la fonction f appliquée à x , $f x y = (f x) y$

0 ; $\text{suc } 0$; $\text{suc} (\text{suc } 0)$; $\text{suc} (\text{suc} (\text{suc } 0))$; ...

On introduit la notation : $H \text{ suc } 0 = (H \text{ suc}) 0 =$ plus petit ordinal
strictement supérieur à tous ceux ci-dessus = ω

$\text{suc} (H \text{ suc } 0)$; $\text{suc} (\text{suc} (H \text{ suc } 0))$; $\text{suc} (\text{suc} (\text{suc} (H \text{ suc } 0)))$; ...

$H \text{ suc} (H \text{ suc } 0)$

$\text{suc} (H \text{ suc} (H \text{ suc } 0))$; $\text{suc} (\text{suc} (H \text{ suc} (H \text{ suc } 0)))$; ... $H \text{ suc} (H$

$\text{suc} (H \text{ suc } 0)) \dots H (H \text{ suc}) 0$

$\text{suc} (H (H \text{ suc}) 0)$

$H \text{ suc} (H (H \text{ suc}) 0)$

$H \text{ suc} (H \text{ suc} (H (H \text{ suc}) 0))$

$H (H \text{ suc}) (H (H \text{ suc}) 0)$

$H (H (H \text{ suc})) 0$

$H H \text{ suc } 0$

$H H \text{ suc } (H H \text{ suc } 0)$
 $H (H H \text{ suc}) 0$
 $H (H H \text{ suc}) (H (H H \text{ suc}) 0)$
 $H (H (H H \text{ suc})) 0$
 $H (H (H (H H \text{ suc}))) 0$
 $H H (H H \text{ suc}) 0$
 $H H (H H (H H \text{ suc})) 0$
 $H (H H) \text{ suc } 0$
 $H (H (H H)) \text{ suc } 0$
 $H H H \text{ suc } 0 \dots$

On introduit la notation :

$R_1 H \text{ suc } 0 =$ plus petit ordinal strictement supérieur à $\text{suc } 0$,
 $H \text{ suc } 0$, $H H \text{ suc } 0$, $H H H \text{ suc } 0$, ...

$R_1 H \text{ suc } 0 ; \text{ suc}(R_1 H \text{ suc } 0) ; R_1 H \text{ suc } (R_1 H \text{ suc } 0)$
 $H (R_1 H \text{ suc}) 0$
 $R_1 H (R_1 H \text{ suc}) 0$
 $H (R_1 H) \text{ suc } 0$
 $R_1 H (R_1 H) \text{ suc } 0$
 $R_1 H (R_1 H) (R_1 H) \text{ suc } 0$
 $R_1 (R_1 H) \text{ suc } 0$
 $H R_1 H \text{ suc } 0$
 $R_1 H R_1 H \text{ suc } 0$
 $R_1 H R_1 H R_1 H \text{ suc } 0$
 $R_2 R_1 H \text{ suc } 0$
 $R_3 R_2 R_1 H \text{ suc } 0 = R_{3\dots 1} H \text{ suc } 0$
 $R_{\omega\dots 1} H \text{ suc } 0$

$$R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } (R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0)$$
$$R_{\omega \dots 1} H (R_{\omega \dots 1} H \text{ suc}) 0$$
$$R_{\omega \dots 1} H (R_{\omega \dots 1} H) \text{ suc } 0$$
$$R_1 (R_{\omega \dots 1} H) \text{ suc } 0$$
$$R_{\omega \dots 1} (R_{\omega \dots 1} H) \text{ suc } 0$$
$$R_{\omega \dots 1} H R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$R_2 R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0 = R_{\omega+1 \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$R_3 R_2 R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0 = R_{\omega+2 \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$R_{\omega \dots 2} R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0 = R_{\omega \cdot 2 \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$R_{(R_{\omega \dots 1} H \text{ suc } 0) \dots 1} H \text{ suc } 0$$
$$H(\xi \mapsto R_{\xi \dots 1} H \text{ suc } 0) 0$$

Les nombres entiers naturels peuvent être représentés par des ensembles, chaque nombre étant représenté par l'ensemble des nombres qui lui sont strictement inférieurs :

- $0 = \{\}$ (l'ensemble vide)
- $1 = \{0\} = \{\{\}\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$
- $3 = \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$
- ...

Le successeur d'un nombre entier naturel peut être défini par $suc(n) = n + 1 = n \cup \{n\}$.

On a $n \leq p$ si et seulement si $n \subseteq p$.

\mathbb{N} est l'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 Les nombres ordinaux transfinis, ou plus simplement ordinaux, sont une généralisation de la notion de nombre entiers naturels, obtenue en considérant des ensembles infinis. \mathbb{N} considéré en tant qu'ordinal, s'écrit ω . ω est le plus petit ordinal supérieur à tous les nombres de la suite $0, 1, 2, 3, \dots$. On dit que ω est un ordinal limite et que $0, 1, 2, 3, \dots$ est une suite fondamentale de ω , ce qu'on écrit : $\omega = \sup\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ou $\omega = \lim(n \mapsto n)$ (car le n ème élément en commençant par 0 de cette suite est n) = $\lim I$ où I désigne la fonction identité, ou $\omega[n] = n$ ce qui signifie que le n ème élément de la suite fondamentale de ω est n , mais cette notation n'est pas très rigoureuse car un ordinal n'a pas une unique suite fondamentale, par exemple $1, 2, 3, 4, \dots$ est aussi une suite fondamentale de ω , car le plus petit ordinal supérieur à tous les ordinaux de cette suite est aussi ω , de même pour la suite $0, 2, 4, 6, \dots$. Avec ces suites fondamentales on aurait respectivement $\omega[n] = n + 1$ et $\omega[n] = 2n$.

Le successeur peut être généralisé aux nombres ordinaux transfinis : $suc(\omega) = \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$
 $suc(suc(\omega)) = \omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1\}$, etc...

On peut ensuite considérer l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots\}$ qui est un ordinal limite, et $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots$ est une suite fondamentale de cet ordinal. Cet ordinal est $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ ou $\omega \cdot 2$.

On peut ensuite continuer à définir des ordinaux de plus en plus grands : $\omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$

Ordinaux calculables ou constructifs ou récursifs

" Un ordinal calculable, dit aussi indifféremment " constructif" ou " récursif" , est un ordinal α qu'on peut réaliser informatiquement : c'est-à-dire qu'on peut écrire un programme (...) qui est capable de " manipuler" les ordinaux $< \alpha$ (ce qui importe est de pouvoir les comparer (...)). Autrement dit, on peut représenter les ordinaux $< \alpha$ par une donnée informatique (...) de manière qu'il soit algorithmiquement faisable de tester les représentations valables et de comparer les ordinaux représentés (...). Ce système informatique s'appelle un système de notations ordinales (sous-entendu : calculable) de taille α , et un ordinal calculable est donc un ordinal admettant un système de notations ordinales. (...) il existe un plus petit ordinal non calculable, tout ordinal strictement plus petit est calculable et tout ordinal à partir de lui ne l'est pas. Ce plus petit ordinal non calculable s'appelle l'ordinal de Church-Kleene et est noté ω_1^{CK} ."

D. Madore, Petit guide bordélique de quelques ordinaux intéressants

Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.
Deux ensembles ont même cardinal s'il existe une bijection entre ces deux ensembles, c'est-à-dire si on peut associer à chaque élément de chacun des deux ensemble un unique élément de l'autre ensemble.
Ca se généralise aux ensembles infinis.

A chaque ordinal on peut associer un cardinal. Deux ordinaux ont le même cardinal s'il existe une bijection entre eux. Le plus petit ordinal associé à un cardinal donné est appelé ordinal initial de ce cardinal.

Par exemple, le cardinal de ω est \aleph_0 . C'est aussi le cardinal de $\omega + 1$ ou $\omega \cdot 2$.

Les cardinaux sont parfois identifiés avec leurs ordinaux initiaux ($\aleph_0 = \omega$). Dans ce cas, l'ordinal initial d'un cardinal est lui-même.

Un ensemble infini a pour cardinal \aleph_0 si on peut énumérer ses éléments c'est-à-dire écrire une suite telle que tout élément se trouve quelque part dans cette suite. Un tel ensemble est dit dénombrable.

$\omega + 1$ considéré en tant qu'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à $\omega + 1$ est dénombrable car on peut énumérer ses éléments, par exemple :

$$\omega, 0, 1, 2, \dots$$

De même $\omega \cdot 2$:

$$0, \omega, 1, \omega + 1, 2, \omega + 2, \dots$$

ω_1 est le plus petit ordinal non dénombrable, c'est-à-dire de cardinal strictement supérieur à ω , est c'est aussi l'ensemble de tous les ordinaux dénombrables, c'est-à-dire de cardinal inférieur ou égal à ω . Cela signifie que tous les ordinaux inférieurs à ω_1 sont dénombrables, et ω_1 et tous les ordinaux supérieurs sont non dénombrables.

On définit les ordinaux ω_k par :

- $\omega_0 = \omega$
- ω_{k+1} est le plus petit ordinal de cardinal strictement supérieur à ω_k

Un ordinal quelconque α est toujours une des trois possibilités suivantes :

- Zero : $\alpha = 0$
- Le successeur d'un autre ordinal : $\alpha = \text{suc}(\beta) = \beta + 1$
- Un ordinal limite : $\alpha = \lim_{\beta} f = \sup_{\xi \in \beta} \{f(\xi)\}$
où pour tout $\xi \in \beta$ ou $\xi < \beta$, $f(\xi)$ est un ordinal. Un ordinal limite peut toujours être défini comme $\lim_{\omega_k} f$ en réarrangeant éventuellement l'ordre des éléments de β .
J'utiliserai la notation Lim_k pour \lim_{ω_k} . Quand $\beta = \omega = \omega_0$, $\lim_{\omega} f$ sera écrit plus simplement $\lim f$. C'est le cas pour les ordinaux limites dénombrables qui ont pour cardinal ω .

La cofinalité d'un ordinal est définie par :

- $\text{cof } 0 = 0$
- $\text{cof}(\text{suc } \alpha) = 1$
- $\text{cof}(\lim_{\beta} f) = \beta$ s'il n'existe pas d'ordinal $\gamma < \beta$ tel que $\lim_{\beta} f = \lim_{\gamma} g$.

Un ordinal régulier est un ordinal égal à sa cofinalité.

Un ordinal singulier est un ordinal qui n'est pas régulier.

La cofinalité d'un ordinal est un ordinal régulier :

$$\text{cof}(\text{cof } \alpha) = \text{cof } \alpha.$$

Un nombre ordinal dénombrable est :

- Soit 0
- Soit le successeur d'un autre nombre ordinal dénombrable
- Soit la limite d'une suite dite fondamentale $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$
c'est-à-dire le plus petit ordinal supérieur à tous les ordinaux de cette suite.

Par exemple :

- 1 est le successeur de 0
- 2 est le successeur de 1
- ω est la limite de la suite fondamentale 0, 1, 2, 3, ...
C'est aussi la limite des suites fondamentales 1, 2, 3, 4, ... et 0, 2, 4, 6, ...
- $\omega + 1$ est le successeur de ω
- $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ est la limite de la suite fondamentale $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots$

On peut définir sur les nombres ordinaux transfinis les opérations arithmétiques habituellement définies sur les nombres entiers naturels en ajoutant une définition pour le cas d'un ordinal limite :

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \text{suc}(\beta) = \text{suc}(\alpha + \beta)$
- $\alpha + \text{lim}(f) = \text{lim}(n \mapsto \alpha + f(n)) = \text{lim}[\alpha + f(\bullet)]$

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \text{suc}(\beta) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \text{lim}(f) = \text{lim}(n \mapsto \alpha \cdot f(n)) = \text{lim}[\alpha \cdot f(\bullet)]$

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{\text{suc}(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- $\alpha^{\text{lim}(f)} = \text{lim}(n \mapsto \alpha^{f(n)}) = \text{lim}[\alpha^{f(\bullet)}]$

La limite de $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$ est appelée ε_0 . C'est le plus petit point fixe de la fonction $\xi \mapsto \omega^\xi$, c'est-à-dire le plus petit ordinal α tel que $\omega^\alpha = \alpha$. Cette suite fondamentale de ε_0 peut être définie par :

- $\varepsilon_0[0] = \omega$
- $\varepsilon_0[n + 1] = \omega^{\varepsilon_0[n]}$

où $\alpha[n]$ représente le nième élément de la suite fondamentale de α . Le problème est qu'un ordinal n'a pas une suite fondamentale unique. Par exemple, une autre suite fondamentale de ε_0 peut être définie par :

- $\varepsilon_0[0] = 0$
- $\varepsilon_0[n + 1] = \omega^{\varepsilon_0[n]}$

ce qui correspond à la suite :

$0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$

qui a la même limite ε_0 .

Cette notation ne me paraît donc pas très rigoureuse et je préfère utiliser des notation sous forme de limites de fonctions, par exemple :

$$\varepsilon_0 = \lim(n \mapsto (\xi \mapsto \omega^\xi)^n \omega) = \lim[[\omega^\bullet]^\bullet \omega]$$

et

$$\varepsilon_0 = \lim(n \mapsto (\xi \mapsto \omega^\xi)^n 0) = \lim[[\omega^\bullet]^\bullet 0]$$

Une méthode générale pour définir de grands ordinaux consiste à partir d'une fonction f qui, appliquée à un ordinal, donne un ordinal plus grand, par exemple la fonction $\xi \mapsto \omega^\xi$, et à répéter l'application de cette fonction à partir d'une valeur de départ. Mais on reste bloqué en-dessous d'un ordinal α tel que $\alpha = f(\alpha)$. On dit que α est un point fixe de f . Par exemple, ε_0 est un point fixe de $\xi \mapsto \omega^\xi$.

Pour aller plus loin, il suffit d'ajouter 1 puis de répéter l'application de f pour obtenir son deuxième point fixe, par exemple la limite de $\varepsilon_0 + 1, \omega^{\varepsilon_0+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}, \dots = \varepsilon_1$, qui est aussi la limite de $\varepsilon_0, \varepsilon_0^{\varepsilon_0}, \varepsilon_0^{\varepsilon_0^{\varepsilon_0}}, \dots$

On peut ainsi énumérer les points fixes successifs d'une fonction.

On définit de même ε_2 comme la limite de $\varepsilon_1, \varepsilon_1^{\varepsilon_1}, \varepsilon_1^{\varepsilon_1^{\varepsilon_1}}, \dots$
ou de $\varepsilon_1 + 1, \omega^{\varepsilon_1+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_1+1}}, \dots$ et ainsi de suite. Ensuite on
définit ε_ω comme la limite de $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. On peut ainsi
définir ε_α pour tout ordinal α .

On peut ensuite parcourir les points fixes de la fonction $\xi \mapsto \varepsilon_\xi$. Le plus petit est la limite de la suite fondamentale $\varepsilon_0, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}, \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}}, \dots$ appelée ζ_0 .

Le deuxième point fixe est ζ_1 défini comme la limite de la suite $\zeta_0 + 1, \varepsilon_{\zeta_0+1}, \varepsilon_{\varepsilon_{\zeta_0+1}}, \dots$ et ainsi de suite.

On pourrait continuer comme ça en utilisant des lettres grecques successives, mais il est plus simple de numéroter ces fonctions en définissant les fonctions de Veblen :

- $\varphi_0(\alpha) = \omega^\alpha$
- $\varphi_1(\alpha) = \varepsilon_\alpha$
- $\varphi_2(\alpha) = \zeta_\alpha$
- $\varphi_3(\alpha) = \eta_\alpha$
- ...

Les fonctions de Veblen peuvent aussi être représentées par une fonction à 2 variables :

$$\varphi_{\beta}(\alpha) = \varphi(\beta, \alpha)$$

et peuvent être généralisées à plusieurs variables :

$$\varphi_{\beta_n, \dots, \beta_1}(\alpha) = \varphi(\beta_n, \dots, \beta_1, \alpha)$$

La limite de cette notation est appelée "petit ordinal de Veblen". Cette notation est équivalente aux "Klammersymbols" de Schütte :

$$(\xi \mapsto \omega^{\xi}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

qui permettent de définir des fonctions de Veblen avec un nombre transfini de variables, par exemple :

$$(\xi \mapsto \omega^{\xi}) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$$

La limite de cette notation est appelée "grand ordinal de Veblen"

Dans la notation $\varphi_{\delta,\gamma,\beta}(\alpha)$, la suite δ, γ, β peut être représentée par un seul ordinal $\Omega^2 \cdot \delta + \Omega \cdot \gamma + \beta$ où Ω représente un ordinal plus grand que δ, γ et β , par exemple le plus petit ordinal non dénombrable ω_1 , ou le plus petit ordinal non constructif ω_1^{CK} , de même que par exemple la suite de chiffres 3,5,4 peut être représentée par un seul nombre $354 = 10^2 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 4$.

La notation de Simmons

Harold Simmons commence par introduire généraliser de façon canonique l'exponentiation d'une fonction à une puissance entière pour définir l'exponentiation d'une fonction à une puissance ordinale. f^n représente $f \circ f \circ \dots \circ f$ avec f répétée n fois, $f^\omega \zeta$ est la limite de $\zeta, f \zeta, f(f \zeta), \dots, f^{\omega+1} \zeta = f(f^\omega \zeta)$, etc...

Plus précisément, on définit :

- $g^0 \zeta = \zeta$
- $g^{\alpha+1} \zeta = g(g^\alpha \zeta)$
- $g^\lambda \zeta = \sup\{g^\alpha \zeta \mid \alpha < \lambda\}$ (si λ est un ordinal limite)

Simmons définit ensuite les fonctions et notations suivantes :

- $Fix f \zeta = f^\omega(\zeta + 1)$ plus petit point fixe de f supérieur à ζ
- $Next = Fix[\omega^\bullet] = Fix(\xi \mapsto \omega^\xi)$
- $Next \alpha = Fix[\omega^\bullet]\alpha$ plus petit ε_β supérieur à α
- $[0]h = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha 0)$
- $[1]hg = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha g 0)$
- $[2]hgf = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha gf 0)$
- $\Delta[1] = Next 0 = \varepsilon_0$
- $\Delta[2] = [0]Next 0 = \zeta_0$
- $\Delta[3] = [1][0]Next 0$, etc...

La limite de cette suite est appelée ordinal de Bachmann Howard.

Le 0 final peut être remplacé par ω .

Correspondance avec φ de Veblen :

ε_0 est le prochain ε_α après 0 (ou après ω , ou après tout ordinal plus petit que ε_0), donc on a $\varepsilon_0 = \text{Next } 0 = \text{Next } \omega$.

ε_1 est le prochain ε_α après ε_0 , donc on a :

$\varepsilon_1 = \text{Next } \varepsilon_0 = \text{Next } (\text{Next } 0) = \text{Next}^2 0 = \text{Next } (\text{Next } \omega) = \text{Next}^2 \omega \dots$

ε_ω est la limite de $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. C'est la limite de $\text{Next}^1 0, \text{Next}^2 0, \text{Next}^3 0, \dots$ qui est égale à $\text{Next}^\omega 0$.

Plus généralement, on a $\varepsilon_\alpha = \varphi_1(\alpha) = \text{Next}^{1+\alpha} 0 = \text{Next}^{1+\alpha} \omega$.

$\zeta_0 = \varphi_2(0)$ est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$ (plus grand que 0), donc $\zeta_0 = \text{Fix}(\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha)0 = \text{Fix}(\alpha \mapsto \text{Next}^{1+\alpha}0)0 = \text{Fix}(\alpha \mapsto \text{Next}^\alpha 0)0 = [0]\text{Next } 0$.

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\alpha \mapsto \text{Next}^{1+\alpha}0)0 &= \sup\{1, \text{Next}^2 0 = \varepsilon_1, \text{Next}^{1+\varepsilon_1}0 = \varepsilon_{\varepsilon_1}, \dots\} \\ \text{Fix}(\alpha \mapsto \text{Next}^\alpha 0)0 &= \sup\{1, \text{Next } 0 = \varepsilon_0, \text{Next}^{\varepsilon_0}0 = \text{Next}^{1+\varepsilon_0}0 = \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots\} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le résultat est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$. Comme ζ_0 est aussi plus grand que ω , c'est aussi $[0]\text{Next } \omega$ selon un calcul similaire.

$\zeta_1 = \varphi_2(1)$ est le point fixe suivant de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$, le plus petit strictement supérieur à ζ_0 , donc $\zeta_1 = \text{Fix}(\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha)\zeta_0 = \text{Fix}(\alpha \mapsto \text{Next}^\alpha 0)\zeta_0 = [0]\text{Next } \zeta_0 = [0]\text{Next}([0]\text{Next } 0) = ([0]\text{Next})^2 0 = [0]\text{Next}([0]\text{Next } \omega) = ([0]\text{Next})^2 \omega$.

Plus généralement, $\zeta_\alpha = ([0]\text{Next})^{1+\alpha}0$.

Des calculs similaires donnent $\eta_0 = \varphi_3(0) = [0]^2\text{Next } 0$ et $\eta_\alpha = ([0]^2\text{Next})^{1+\alpha}0$.

Plus généralement on a :

$$\varphi_{1+\beta}(\alpha) = ([0]^\beta \text{Next})^{1+\alpha}0 = ([0]^\beta \text{Next})^{1+\alpha}\omega.$$

Correspondance avec φ de Veblen :

$$\varphi_{1+\beta}(\alpha) = ([0]^\beta \text{Next})^{1+\alpha} \omega$$
$$[0]^\Omega = [1][0]; [0]^{\Omega^n} = [1]^n[0]$$

Si $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\gamma,\beta}(\alpha) &= \varphi_{\Omega \cdot \gamma + \beta}(\alpha) \\ &= ([0]^{\Omega \cdot \gamma + \beta} \text{Next})^{1+\alpha} \omega \\ &= ([0]^\beta (([0]^\Omega)^\gamma \text{Next}))^{1+\alpha} \omega \\ &= ([0]^\beta (([1][0])^\gamma \text{Next}))^{1+\alpha} \omega\end{aligned}$$

Si $\delta > 0$ ou $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\delta,\gamma,\beta}(\alpha) &= \varphi_{\Omega^2 \cdot \delta + \Omega \cdot \gamma + \beta}(\alpha) \\ &= ([0]^{\Omega^2 \cdot \delta + \Omega \cdot \gamma + \beta} \text{Next})^{1+\alpha} \omega \\ &= ([0]^\beta (([0]^\Omega)^\gamma ([0]^{\Omega^2})^\delta \text{Next}))^{1+\alpha} \omega \\ &= ([0]^\beta (([1][0])^\gamma (([1]^2[0])^\delta \text{Next})))^{1+\alpha} \omega\end{aligned}$$

$[1]^\omega [0] \text{Next}$ ω est le petit ordinal de Veblen.

$\Delta[4] = [2][1][0] \text{Next}$ ω est le grand ordinal de Veblen

"Rationalisation" de φ :

$$\varphi_{1+\beta}(\alpha) = \varphi'_{\beta}(1 + \alpha)$$

$$\varphi'_{\beta}(\alpha) = ([0]_{\beta} \text{Next})^{\alpha\omega}$$

$$\varphi_{\gamma,\beta}(\alpha) = \varphi'_{\gamma,\beta}(1 + \alpha)$$

$$\varphi'_{\gamma,\beta}(\alpha) = ([0]_{\beta} (([1][0])^{\gamma} \text{Next}))^{\alpha\omega}$$

Correspondances avec la première notation

$$H f \alpha = \sup\{\alpha, f\alpha, f(f\alpha), \dots\}$$

- $0, \text{suc } 0 = 1, \text{suc}(\text{suc } 0) = 2, \dots \quad H \text{suc } 0 = \omega$
- $\text{suc}(H \text{suc } 0) = \omega + 1, \text{suc}(\text{suc}(H \text{suc } 0)) = \omega + 2, \dots$
 $H \text{suc}(H \text{suc } 0) = \omega + \omega = \omega \cdot 2$
- $0, H \text{suc } 0 = \omega, H \text{suc}(H \text{suc } 0) = \omega \cdot 2, \dots \quad H(H \text{suc}) 0 = \omega \cdot \omega = \omega^2$
- $\text{suc } 0 = 1, H \text{suc } 0 = \omega, H(H \text{suc}) 0 = \omega^2, \dots \quad H H \text{suc } 0 = \omega^\omega$
- $\text{suc } 0 = 1, H \text{suc } 0 = \omega, H H \text{suc } 0 = \omega^\omega, \dots \quad R_1 H \text{suc } 0 = \varepsilon_0$

- $\text{suc } 0 = 1, H \text{ suc } 0 = \omega, H H \text{ suc } 0 = \omega^\omega, \dots R_1 H \text{ suc } 0 = \varepsilon_0$
- $R_1 H \text{ suc } (R_1 H \text{ suc } 0)$
- $H (R_1 H \text{ suc } 0)$
- $R_1 H (R_1 H \text{ suc } 0)$
- $H (R_1 H) \text{ suc } 0$
- $R_1 H (R_1 H) \text{ suc } 0$
- $R_1 (R_1 H) \text{ suc } 0$
- $H R_1 H \text{ suc } 0$
- $R_1 H R_1 H \text{ suc } 0$
- $R_2 R_1 H \text{ suc } 0$
- $R_3 R_2 R_1 H \text{ suc } 0 = R_{3\dots 1} H \text{ suc } 0$
- $R_{H \text{ suc } 0\dots 1} H \text{ suc } 0$
- $R_{R_{H \text{ suc } 0\dots 1} H \text{ suc } 0\dots 1} H \text{ suc } 0$
- $H [R_{\bullet\dots 1} H \text{ suc } 0] 0$

Correspondances :

- $H \text{ suc } 0 = \omega$
- $\text{suc}(H \text{ suc } 0) = \omega + 1$
- $H \text{ suc}(H \text{ suc } 0) = \omega + \omega = \omega \cdot 2$
- $H(H \text{ suc}) 0 = \omega \cdot \omega = \omega^2$
- $H H \text{ suc } 0 = \omega^\omega$
- $R_1 H \text{ suc } 0 =$ borne supérieure de
 $\text{suc } 0, H \text{ suc } 0, H H \text{ suc } 0, H H H \text{ suc } 0, \dots = \varepsilon_0 =$
 $\varphi(1, 0) = \varphi'(0, 1) = \text{Next } \omega$
- $\text{suc}(R_1 H \text{ suc } 0) = \varepsilon_0 + 1$
- $R_1 H \text{ suc}(R_1 H \text{ suc } 0) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \cdot 2$
- $R_1 H (R_1 H \text{ suc}) 0 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon_0^2$
- $R_1 H (R_1 H) \text{ suc } 0 = \varepsilon_0^{\varepsilon_0}$
- $R_1(R_1 H) \text{ suc } 0 = \varepsilon_1 = \varphi(1, 1) = \varphi'(0, 2) = \text{Next}(\text{Next } \omega)$

Correspondance avec la notation de Simmons :

$\dots, [3] \rightarrow R_5, [2] \rightarrow R_4, [1] \rightarrow R_3, [0] \rightarrow R_2, \text{Next} \rightarrow R_1, \omega \rightarrow H \text{ suc } 0$

Exemples :

- $\omega = H \text{ suc } 0$
- $\varepsilon_0 = \text{Next } \omega = R_1 H \text{ suc } 0$
- $\zeta_0 = [0] \text{Next } \omega = R_2 R_1 H \text{ suc } 0$
- $\Gamma_0 = [1][0] \text{Next } \omega = R_3 R_2 R_1 H \text{ suc } 0$
- $LVO = [2][1][0] \text{Next } \omega = R_4 R_3 R_2 R_1 H \text{ suc } 0$

Ordinaux-arbres (tree ordinals)

Un ordinal peut avoir différentes suites fondamentales, et donc être défini comme la limite de fonctions différentes, par exemple :

$$\begin{aligned}\omega &= \sup\{0, 1, 2, \dots\} = \lim(n \mapsto n) \\ &= \sup\{1, 2, 3, \dots\} = \lim(n \mapsto n + 1)\end{aligned}$$

Un ordinal-arbre est un ordinal associé à une suite fondamentale particulière.

Les deux fonctions ci-dessus définissent donc un même ordinal, mais deux ordinaux-arbres différents.

Un ordinal-arbre a appartient à la classe d'ordinaux-arbres $\Omega_n (n \in \mathbb{N})$ si à vérifie une des propositions suivantes :

- $a = 0$
- $a = a' + 1$ pour un ordinal-arbre a' appartenant à la classe d'ordinaux-arbres Ω_n
- a est une fonction de Ω_k vers Ω_n pour un certain $k \in \mathbb{N}$ avec $k < n$. Dans ce cas, on dit que a est un ordinal-arbre limite.

A tout ordinal-arbre a , on peut associer un ordinal correspondant $\alpha = |a|$ obtenu en ignorant le choix d'une suite fondamentale particulière, et défini par :

- $|0| = 0$
- $|a + 1| = |a| + 1$
- $|a| = \sup |a[b]|$ if a is a function from Ω_k to Ω_n .

ou de façon équivalente : $|a| = \sup_{b < a} \{|b| + 1\}$

Les ordinaux-arbres permettent de définir rigoureusement la hiérarchie de croissance rapide (FGH) $f_a(n)$ avec $a \in \Omega_1$:

- $f_0(n) = n + 1$
- $f_{a+1}(n) = f_a^n(n)$
- $f_a(n) = f_{a[n]}(n)$ si a est un ordinal-arbre limite, où $a[n]$ représente le résultat de l'application de la fonction a au nombre entier n .

On peut définir l'extension suivante de la hiérarchie de croissance rapide (qui correspond au cas $n=0$) :

- $F_n(0, b) = b + 1$
- $F_n(a + 1, b) = [F_n(a, \bullet)]^b(b)$
- $(F_n(a, b))[c] = F_n(a[c], b)$ si a est une fonction de Ω_k vers Ω_{n+1} avec $k < n$
- $(F_n(a, b)) = F_n(a[b], b)$ si a est une fonction de Ω_n vers Ω_{n+1}

Cette hiérarchie de fonctions permet de représenter des ordinaux, par exemple :

- $F_1(0, b) = b + 1 = \text{suc}(b)$
- $F_1(1, b) = \text{suc}^b(b) = b + b = b \cdot 2$
- $F_1(2, b) = b \cdot 2^b$
- $|F_1(2, \omega_0)| = |\omega_0 \cdot 2^{\omega_0}| = \omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$
- $|F_1(2, F_1(2, \omega_0))| = |(\omega_0 \cdot 2^{\omega_0}) \cdot 2^{\omega_0 \cdot 2^{\omega_0}}| = \omega^2 \cdot 2^{\omega^2} = \omega^2 \cdot 2^{\omega \cdot \omega} = \omega^2 \cdot (2^\omega)^\omega = \omega^2 \cdot \omega^\omega = \omega^{2+\omega} = \omega^\omega$
- $|F_1(3, \omega_0)| = |[F_1(2, \bullet)]^{\omega_0}(\omega_0)| = \sup | [F_1(2, \bullet)]^{\omega_0[k]}(\omega_0) | = \sup | [F_1(2, \bullet)]^k(\omega_0) | = \sup(\omega^{\cdot}) = \varepsilon_0$
- $|F_1(2, F_1(3, \omega_0))| = \varepsilon_0 \cdot 2^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0^2$
- $|[F_1(2, \bullet)]^2(F_1(3, \omega_0))| = \varepsilon_0^2 \cdot 2^{\varepsilon_0^2} = \varepsilon_0^{\varepsilon_0}$
- $|F_1(3, F_1(3, \omega_0))| = \sup\{\varepsilon_0^{\cdot}\} = \varepsilon_1$

- $|F_1(4, \omega_0)| = \zeta_0 = \varphi(2, 0) = \varphi'(1, 1)$
- $|F_1(3, F_1(4, \omega_0))| = \sup\{\zeta_0^{\dots^{\zeta_0}}\} = \varepsilon_{\zeta_0+1}$
- $|F_1(4, F_1(4, \omega_0))| = \sup\{\varepsilon_{\dots^{\varepsilon_{\zeta_0+1}}}\} = \zeta_1 = \varphi(2, 1) = \varphi'(1, 2)$
- $|F_1(5, \omega_0)| = \eta_0 = \varphi(3, 0) = \varphi'(2, 1)$
- $|F_1(\omega_0, \omega_0)| = \varphi_\omega(0)$
- $|F_1(\omega_1 + 1, \omega_0)| = \Gamma_0$
- $|F_1(F_2(3, \omega_1), \omega_0)| = BHO$
- ...

Voir "Ridiculously huge numbers" sur Youtube.

Fonctions d'écrasement (Ordinal collapsing functions)

Nous avons déjà vu que la méthode des points fixes permet de définir des ordinaux en répétant l'application d'une fonction qui donne un résultat plus grand que l'ordinal auquel elle est appliquée. L'idée des fonctions d'écrasement est de représenter les points fixes en utilisant un ordinal Ω plus grand que tous les ordinaux que l'on veut décrire (on se limite actuellement aux ordinaux dénombrables). On peut prendre par exemple pour Ω le plus petit ordinal non dénombrable.

Soit par exemple la fonction $\psi(\alpha) = \omega^\alpha$.

On généralise cette fonction en définissant :

$$\psi(\Omega) = \sup\{0, \psi(0), \psi(\psi(0)), \dots\}$$

On définit de même :

$$\psi(\Omega \cdot 2) = \psi(\Omega + \Omega) = \sup\{0, \psi(\Omega), \psi(\Omega + \psi(\Omega)), \dots\}$$

" (...) on introduit une certaine fonction ψ dont l'argument peut faire intervenir un symbole magique Ω , et ce symbole veut dire quelque chose comme "faire un point fixe de la fonction ψ où le dernier symbole Ω est remplacé par une variable" ; bref, Ω est une sorte d' "opérateur de point fixe" qui généralise de façon systématique ce qu'on essayait de faire dans les fonctions de Veblen (...)"

David Madore, Petit guide bordélique de quelques ordinaux intéressants

$$\lim f = \sup\{f(0), f(1), f(2), \dots\} = \sup_{\alpha < \omega} f(\alpha) = \sup_{\alpha \in \omega} f(\alpha)$$

$$\text{Lim}_1 f = \sup_{\alpha < \omega_1} f(\alpha) = \sup_{\alpha \in \omega_1} f(\alpha)$$

où ω_1 désigne le plus petit ordinal non dénombrable.

$\omega_1 = \text{Lim}_1 I$ où I désigne la fonction identité.

Posons $\Omega = \omega_1$. On a alors :

$$\Omega = \text{Lim}_1 I$$

$$\Omega \cdot 2 = \Omega + \Omega = \text{Lim}_1 (\xi \mapsto \Omega + \xi)$$

On peut généraliser la définition de ψ par :

$$\psi(\text{Lim}_1 f) = \lim(n \mapsto (\psi \circ f)^n(0))$$

ce qui donne :

$$\psi(\Omega) = \psi(\text{Lim}_1 I) = \lim(n \mapsto (\psi \circ I)^n(0))$$

$$= \lim(n \mapsto \psi^n(0)) = \sup\{0, \psi(0), \psi^2(0), \dots\}$$

$$\psi(\Omega \cdot 2) = \psi(\Omega + \Omega) = \psi(\text{Lim}_1 (\xi \mapsto \Omega + \xi))$$

$$= \lim(n \mapsto (\xi \mapsto \psi(\Omega + \xi))^n(0))$$

On retrouve bien :

$$\psi(\Omega \cdot 2) = \psi(\Omega + \Omega) = \sup\{0, \psi(\Omega), \psi(\Omega + \psi(\Omega)), \dots\}$$

Définition complète de la fonction ψ :

- $\psi(0) = 1$
- $\psi(\alpha + 1) = \psi(\alpha) \cdot \omega$
- $\psi(\lim f) = \lim(\psi \circ f)$
- $\psi(\text{Lim}_1 f) = \lim(n \mapsto (\psi \circ f)^n(0))$

Limite de cette notation :

- $\psi(\Omega + \Omega) = \psi(\Omega \cdot 2)$
- $\psi(\Omega \cdot \Omega) = \psi(\Omega^2)$
- $\psi(\Omega^\Omega)$
- $\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$
- ...
- $\psi(\varepsilon_{\Omega+1}) = BHO$

Problème : $\varepsilon_{\Omega+1}$ n'est pas représentable dans cette notation. On introduit une fonction ψ_1 et un ordinal Ω_2 (on peut prendre par exemple $\Omega_2 = \omega_2$ le plus petit ordinal de cardinal strictement supérieur à ω_1) vérifiant $\psi_1(\Omega_2) = \varepsilon_{\Omega+1}$. On a alors $BHO = \psi(\psi_1(\Omega_2)) = \psi(\Omega_2)$. Pour plus d'homogénéité dans les notations, on pose aussi $\psi_0 = \psi$ et $\Omega_1 = \Omega$.

Définition complète de la fonction ψ :

- $\psi(0) = 1$
- $\psi(\alpha + 1) = \psi(\alpha) \cdot \omega$
- $\psi(\lim f) = \lim(\psi \circ f)$
- $\psi(\text{Lim}_1 f) = \lim(n \mapsto (\psi \circ f)^n(0))$

Généralisation (fonctions de Buchholz) :

- $\psi_0(0) = 1$
- $\psi_\nu(0) = \Omega_\nu$ pour $\nu > 0$
- $\psi_\nu(\alpha + 1) = \psi_\nu(\alpha) \cdot \omega$
- $\psi_\nu(\lim f) = \lim(\psi_\nu \circ f)$
- $\psi_\nu(\text{Lim}_{\kappa+1} f) = \text{Lim}_{\kappa+1}(\psi_\nu \circ f)$ si $\kappa < \nu$
- $\psi_\nu(\text{Lim}_{\kappa+1} f) = \lim(n \mapsto \psi_\nu(f((\psi_\kappa \circ h)^n(0))))$

Traditionnellement, les fonctions d'écrasement sont définies de façon différente mais équivalente, par exemple pour les fonctions de Buchholz :

- $C_\nu^0(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \Omega_\nu\}$,
- $C_\nu^{n+1}(\alpha) = \{\beta + \gamma, \psi_\mu(\eta) \mid \mu, \beta, \gamma, \eta \in C_\nu^n(\alpha) \wedge \eta < \alpha\}$,
- $C_\nu(\alpha) = \bigcup_{n < \omega} C_\nu^n(\alpha)$,
- $\psi_\nu(\alpha) = \min\{\gamma \mid \gamma \notin C_\nu(\alpha)\}$,

avec

$$\Omega_\nu = \begin{cases} 1 & \text{if } \nu = 0 \\ \aleph_\nu & \text{if } \nu > 0 \end{cases}$$

Autres fonctions d'écrasement

Notation de base	Formule	Limite	Extension	Correspondance	Franchissement
Cantor	$cantor(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$	plus petit $\alpha = cantor(\alpha, 0) = \omega^\alpha = \varepsilon_0$	C de Taranovsky	$C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si $C(\alpha, \beta) \geq \alpha$	$C(\Omega, 0) = \varepsilon_0$
	ω^α	plus petit $\alpha = \omega^\alpha = \varepsilon_0$	ψ_0 de Buchholz	$\psi_0(\alpha) = \omega^\alpha$ si $\alpha < \varepsilon_0$	$\psi_0(\Omega) = \varepsilon_0$
Epsilon	ε_α	plus petit $\alpha = \varepsilon_\alpha = \zeta_0$	ψ de Madore	$\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ pour tout $\alpha < \zeta_0$	$\psi(\Omega) = \zeta_0$
Veblen binaire	$\varphi_\alpha(\beta)$ or $\varphi(\alpha, \beta)$	plus petit $\alpha = \varphi(\alpha, 0) = \Gamma_0$	θ	$\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ sous Γ_0	$\theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$

Les fonctions d'écrasement sont des extensions de fonctions sur des ordinaux dénombrables, dont on peut atteindre le point fixe en les appliquant à un ordinal non dénombrable, puis le dépasser en les appliquant à des ordinaux non dénombrables plus grands, par exemple :

- ψ_0 de Buchholz : $\psi_0(\alpha) = \omega^\alpha$ if $\alpha < \varepsilon_0$; $\psi_0(\Omega) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.
- ψ de Madore : $\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ si $\alpha < \zeta_0$; $\psi(\Omega) = \zeta_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$.
- θ de Feferman : $\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ si $\alpha < \Gamma_0$ et $\beta < \Gamma_0$; $\theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, 0)$.
- C de Taranovsky : $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si α est dénombrable; $C(\Omega_1, 0) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.

Exemples de formules générales définissant des fonctions d'écrasement :

- $\psi_\nu(0) = z(\nu)$ (par exemple : $\psi_\nu(0) = \Omega_\nu$, ou $\psi_0(0) = 1; \psi_{1+\nu}(0) = \Omega_{1+\nu} = \omega_{1+\nu}$
- $\psi_\nu(\text{suc } \alpha) = f(\psi_\nu(\alpha))$
- $\psi_\nu(\text{lim } h) = \text{lim}(\psi_\nu \circ h)$ (avec $\text{lim} = \text{Lim}_0$)
- $\psi_\nu(\text{Lim}_{\kappa+1} h) = \text{Lim}_{\kappa+1}(\psi_\nu \circ h)$ si $\kappa < \nu$, ou $\psi_\nu(\alpha)[\eta] = \psi_\nu(\alpha[\eta])$
- $\psi_\nu(\text{Lim}_{\kappa+1} h) = \text{lim}[\psi_\nu(h((\psi_\kappa \circ h)^\bullet(\zeta)))]$ if $\kappa \geq \nu$, avec $\zeta = 0$ ou 1 ou $\psi_\kappa(0)$ par exemple.

Fonctions écrasant des grands cardinaux

Nous avons vu des fonctions d'écrasement qui permettent de définir des grands ordinaux dénombrables à partir d'ordinaux non dénombrables, qui sont aussi des cardinaux, tels que $\Omega = \omega_1$ et $\Omega_2 = \omega_2$.

On peut atteindre des ordinaux dénombrables de plus en plus grands en définissant des fonctions écrasant des cardinaux de plus en plus grands.

Rappel : Tout ordinal, considéré comme l'ensemble des ordinaux qui lui sont inférieurs, a un cardinal, qui est une généralisation de la notion de nombre d'éléments d'un ensemble. Deux ensembles ont le même cardinal s'il existe une bijection entre ces ensembles.

Le cardinal de ω_α est noté \aleph_α .

Les ordinaux et cardinaux correspondants sont parfois identifiés ($\omega_\alpha = \aleph_\alpha$).

Un cardinal \aleph_α est dit cardinal limite si α est un ordinal limite.

Les cardinaux \beth_α sont définis par :

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\xi \mid \xi < \lambda\}$ si λ est un ordinal limite

Si l'hypothèse généralisée du continu est acceptée, on a

$\aleph_\alpha = \beth_\alpha$ pour tout ordinal α .

Un cardinal \beth_α est dit cardinal limite forte si α est un ordinal limite.

Un cardinal faiblement inaccessible est un cardinal limite régulier.

On peut démontrer que si un cardinal κ est faiblement inaccessible, alors c'est le κ -ième point fixe de la fonction $\xi \mapsto \aleph_\xi$.

Un cardinal fortement inaccessible est un cardinal limite forte régulier.

On définit ensuite la notion de degrés d'inaccessibilité pour les inaccessibleités faible et forte. On pose les définitions suivantes, dans lesquelles "inaccessible" peut être remplacé soit par "faiblement inaccessible" soit par "fortement inaccessible".

Un cardinal inaccessible est aussi dit 0-inaccessible (degré 0 d'inaccessibilité).

Un cardinal κ est dit 1-inaccessible (degré 1 d'inaccessibilité) si il est inaccessible et si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- κ est une limite de cardinaux inaccessibles
- Il existe κ cardinaux inaccessibles inférieurs à κ (ou appartenant à κ).
- κ est le κ -ième cardinal inaccessible, ou de façon équivalente κ est un point fixe de la fonction $\xi \mapsto \xi$ -ième cardinal inaccessible

Ces définitions se généralisent à un degré quelconque : κ est $(\alpha + 1)$ -inaccessible si il est α -inaccessible et si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- κ est une limite de cardinaux α -inaccessibles
- Il existe κ cardinaux α -inaccessibles inférieurs à κ (ou appartenant à κ)
- κ est le κ -ième cardinal α -inaccessible

Plus généralement, un cardinal κ est α -inaccessible (degré α) s'il est inaccessible et si pour tout $\beta < \alpha$, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- κ est une limite de cardinaux β -inaccessibles
- il existe κ cardinaux β -inaccessibles inférieurs à κ
- κ est le κ -ième cardinal β -inaccessible

Un cardinal κ est hyperinaccessible ou $(1,0)$ -inaccessible s'il est κ -inaccessible.

Les degrés d'hyperinaccessibilité peuvent être définis de façon similaire aux degrés d'inaccessibilité : κ est α -hyperinaccessible si il est inaccessible et, pour tout $\beta < \alpha$, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- κ est une limite de cardinaux β -hyperinaccessibles
- Il existe κ cardinaux β -hyperinaccessible inférieurs à κ (ou appartenant à κ)
- κ est le κ -ième cardinal β -hyperinaccessible

κ est hyperhyperinaccessible ou hyper^2 -inaccessible si il est κ -hyperinaccessible, et ainsi de suite.

Plus généralement :

κ est hyper^α -inaccessible si il est hyperinaccessible et si pour tout $\beta < \alpha$, il est κ - hyper^β -inaccessible.

κ is α - hyper^β -inaccessible si il est hyper^β -inaccessible et si pour tout $\gamma < \alpha$, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

- κ est une limite de cardinaux γ - hyper^β -inaccessibles
- Il existe κ cardinaux γ - hyper^β -inaccessibles inférieurs à κ (ou appartenant à κ)
- κ est le κ -ième cardinal γ - hyper^β -inaccessible.

On peut utiliser une notation similaire à la notation de Simmons pour représenter les degrés d'inaccessibilité.

Rappel :

$Fix f\zeta = f^\omega(\zeta + 1)$ est le plus petit point fixe de f strictement supérieur à ζ .

$$Next = Fix(\xi \mapsto \omega^\xi)$$

$$[0]h = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha 0)$$

$$[1]hg = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha g 0)$$

$$[2]hgf = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha gf 0)$$

Pour représenter les cardinaux inaccessibles, on définit :

$FIX f\zeta$ est le plus petit point fixe régulier de f strictement supérieur à ζ .

$$NEXT = FIX(\xi \mapsto \omega^\xi)$$

$$[[0]]h = FIX(\alpha \mapsto h^\alpha 0)$$

$$[[1]]hg = FIX(\alpha \mapsto h^\alpha g 0)$$

$$[[2]]hgf = FIX(\alpha \mapsto h^\alpha gf 0)$$

$NEXT 0$ est le plus petit point fixe régulier de $\xi \mapsto \aleph_\xi$, c'est le plus petit cardinal faiblement inaccessible.

$NEXT(NEXT 0) = NEXT^2 0$ est le second, et plus généralement $NEXT^\alpha 0$ est le α -ième point fixe régulier, et le α -ième cardinal inaccessible.

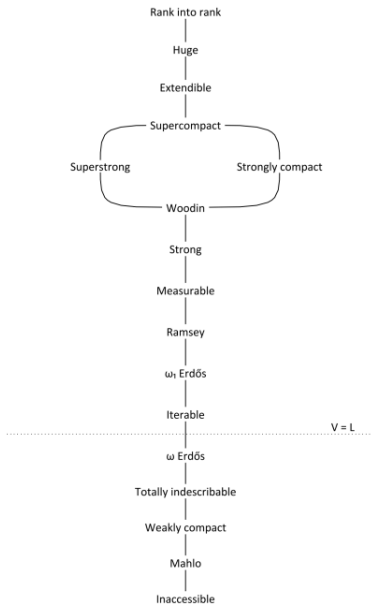
Le plus petit cardinal 1-faiblement inaccessible cardinal est le plus petit κ tel que κ est le κ -ième cardinal faiblement inaccessible, ce qu'on peut écrire $\kappa = NEXT^\kappa 0$. Ce κ est $[[0]] NEXT 0$.

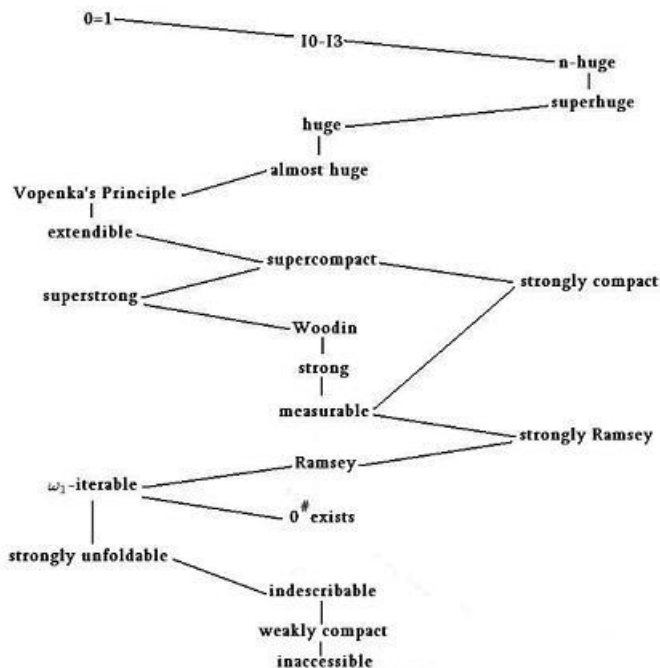
Le α -ième cardinal 1-faiblement inaccessible est $([[0]] NEXT)^\alpha 0$.

Le plus petit cardinal 2-faiblement inaccessible est le plus petit κ tel que κ est le κ -ième cardinal 1-faiblement inaccessible, ce qu'on peut écrire $\kappa = ([[0]] NEXT)^\kappa 0$. Ce κ est $[[0]] ([[0]] NEXT) 0 = [[0]]^2 NEXT 0$.

Plus généralement, le plus petit cardinal α -faiblement inaccessible est $[[0]]^\alpha NEXT 0$ et le β -ième cardinal α -faiblement inaccessible est $([[0]]^\alpha NEXT)^\beta 0$.

Le plus petit cardinal hyper-faiblement inaccessible est le plus petit κ tel que κ est κ -inaccessible, ce qu'on peut écrire $\kappa = [[0]]^\kappa \text{ NEXT } 0$. Ce κ est $[[1]][[0]] \text{ NEXT } 0$.
 Le second est $([[1]][[0]] \text{ NEXT})^2 0$, et plus généralement le α -ième est $([[1]][[0]] \text{ NEXT})^\alpha 0$.





Fonctions écrasant des grands cardinaux

Soit $I(\alpha, \beta) = ([[\alpha]]^{\alpha} \text{NEXT})^{1+\beta} 0$ le $1 + \beta$ -ième cardinal α -faiblement inaccessible.

On peut définir une fonction d'écrasement qui écrase de tels cardinaux de la façon suivante :

- $\psi_{I(0,0)}(0) = 1$
- $\psi_{I(0,\beta+1)}(0) = I(0, \beta) \cdot \omega$
- $\psi_{I(0,\beta)}(\gamma + 1) = \psi_{I(0,\beta)}(\gamma) \cdot \omega$ si β n'est pas un ordinal limite
- $\psi_{I(\beta+1,0)}(0) = [I(\beta, \bullet)]^{\omega}(0)$
- $\psi_{I(\beta+1,\gamma+1)}(0) = [I(\beta, \bullet)]^{\omega}(I(\beta + 1, \gamma) + 1)$
- $\psi_{I(\beta+1,\gamma)}(\delta + 1) = [I(\beta, \bullet)]^{\omega}(\psi_{I(\beta+1,\gamma)}(\delta) + 1)$ si γ n'est pas un ordinal limite
- $\psi_{I(\text{Lim}_{\mu} f, 0)}(0) = \text{Lim}_{\mu}[I(f(\bullet), 0)]$
- $\psi_{I(\text{Lim}_{\mu} f, \gamma+1)}(0) = \text{Lim}_{\mu}[I(f(\bullet), I(\text{Lim}_{\mu} f, \gamma) + 1)]$
- $\psi_{I(\text{Lim}_{\mu} f, \gamma)}(\delta + 1) = \text{Lim}_{\mu}[I(f(\bullet), \psi_{I(\text{Lim}_{\mu} f, \gamma)}(\delta) + 1)]$ si γ n'est pas un ordinal limite
- $I(\beta, \text{Lim}_{\mu} f) = \text{Lim}_{\mu}[I(\beta, f(\bullet))]$
- $\psi_{\pi}(\text{Lim}_{\mu} f) = \text{Lim}_{\mu}(\psi_{\pi} \circ f)$ si $\omega_{\mu} < \pi$
- $\psi_{\pi}(\text{Lim}_{\mu} f) = \lim[\psi_{\pi}(f((\psi_{\omega_{\mu}} \circ f)^{\bullet}(0)))]$ si $\omega_{\mu} \geq \pi$

Complexité de l'écrasement de très grands cardinaux

"Mais au-delà de ça, il arrive des complications bien plus importantes : pour écraser un ordinal " Π_4 -réfléchissant", on doit commencer à gérer des ordinaux dont la description est vraiment plus complexe que l'écrasement de quelque chose (par exemple des ordinaux Π_2 -réfléchissant sur les Π_3 -réfléchissants) : les fonctions d'écrasement prennent en argument non pas juste un ordinal vers lequel écraser et un simple niveau de Mahloïtude, mais des données beaucoup plus riches que sont des "configurations de réflexion" ou des "instances de réflexion" (on n'écrase pas juste vers un ordinal de niveau de Mahloïtude ξ et inférieur à π mais vers un ordinal ayant certaines propriétés de réflexion qui conduisent elles-mêmes à d'autres fonctions d'écrasement), et le système de notation devient incroyablement plus subtil et défini par un nombre assez impressionnant de récursions imbriquées. Au moins les ordinaux " Π_5 -réfléchissants" ou plus n'apportent-ils pas plus de complexité substantielle par rapport aux Π_4 -réfléchissants, mais il y a encore quelques subtilités si on veut inclure tous les niveaux d'un coup, voire, des niveaux indicés par le système d'ordinaux qu'on est en train de définir. C'est en gros à ce point-là que travaille la thèse de Jan-Carl Stegert (Ordinal proof theory of Kripke-Platek set theory augmented by strong reflection principles (2010), disponible ici en PDF), qui introduit des systèmes de notations ordinales dont la seule définition s'étend sur un bon nombre de pages (notamment p. 13–30 pour le système principal, p. 68–70 pour une version simplifiée, p. 66–67 pour une version encore plus simplifiée équivalente à l'écrasement d'un cardinal Mahlo / ordinal Π_3 -réfléchissant, et p. 100–113 pour un système encore plus riche). De ce que je sais, c'est le système de notations ordinales explicite le plus grand qui ait été introduit et rigoureusement analysé dans la littérature mathématique."

D. Madore, Petit guide bordélique de quelques ordinaux intéressants

La notation de Taranovsky

Dmytro Taranovsky a découvert un système de notations d'ordinaux conjecturé, c'est-à-dire que, bien que beaucoup de spécialistes le pensent, il n'est pas prouvé que les expressions dans cette notation représentent bien des ordinaux, autrement dit que cette notation est "bien fondée", c'est-à-dire que tout ensemble a un plus petit élément, ce qui est une propriété fondamentale des ordinaux.

Le système de notation de Taranovsky est en fait une suite infinie de systèmes : le système numéro 0, le système numéro 1, le système numéro 2, ...

La notation de Taranovsky

Dans chacun de ces systèmes, un ordinal est représenté soit par 0 , soit par Ω , soit par $C(\alpha, \beta)$ où α et β représentent deux ordinaux, par exemple : $C(C(0, 0), C(\Omega, 0))$

Un ordinal peut aussi être représenté sous forme postfixée, par exemple : $0\Omega C00CC$

La forme postfixée peut être définie par une grammaire générative :

- $\text{Ord} \rightarrow 0$
- $\text{Ord} \rightarrow \Omega$
- $\text{Ord} \rightarrow \text{Ord Ord } C$

L'ordre entre deux ordinaux est simplement déterminé par la comparaison lexicographique de leurs représentations postfixées avec $C < 0 < \Omega$.

La notation de Taranovsky

A ce stade, on obtient un ensemble ordonné de représentations qui pourrait être intéressant mais qui ne décrit pas des ordinaux car cet ensemble n'est pas "bien ordonné" c'est-à-dire que toute partie non vide n'a pas un plus petit élément. Pour décrire des ordinaux, il faut introduire des contraintes pour restreindre l'ensemble des représentations considérées comme valides, appelées "formes standard".

La notation de Taranovsky

Les formes standard sont définies de la façon suivante :

- 0 et Ω sont standard
- $C(\alpha, \beta)$ est standard si et seulement si :
 - α et β sont standards
 - β est 0 ou Ω ou $C(\gamma, \delta)$ avec $\alpha \leq \gamma$
 - α est "n-construit par dessous à partir de $C(\alpha, \beta)$ " (n-built from below from)

la notion de "n-construit par dessous" étant définie par :

- α est 0-construit par dessous à partir de β si et seulement si $\alpha < \beta$.
- α est k+1-construit par dessous à partir de β si et seulement si pour tout sous-terme γ de α , on a $\gamma \leq \alpha$ ou il existe un sous-terme δ de α tel que γ soit un sous-terme de δ et δ soit k-construit par dessous à partir de β .

On a les propriétés suivantes :

- $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si et seulement si $C(\alpha, \beta) \geq \alpha$
- En particulier, $C(0, \beta) = \beta + \omega^0 = \beta + 1$
- $C(\alpha + 1, \beta) = C(C(0, \alpha), \beta) = [C(\alpha, \bullet)]^\omega(\beta)$ si $C(C(0, \alpha), \beta)$ est en forme standard
- $C(\lim f, \beta) = \lim[C(f(\bullet), \beta)]$
- si $k > 0$, $C(\text{Lim}_k f, \beta) =$
 $\text{Lim}_k[C(f(\bullet), \beta)]$ si $\text{card}(\text{Lim}_k f) \leq \text{card}(\beta)$
 $[C(f(\bullet), \beta)]^\omega(0)$ si $\text{card}(\text{Lim}_k f) > \text{card}(\beta)$

qui permettent de définir les suites fondamentales suivantes :

- si $\alpha = 0$ alors $\text{cof}(\alpha) = 0$
- si $\alpha = \Omega_n$ alors $\text{cof}(\alpha) = \Omega_n$ et $\alpha[\eta] = \eta$
- si $\alpha = C(0, \beta) = \beta + 1$ alors $\text{cof}(\alpha) = 1$ et $\alpha[0] = \beta$
- si $\alpha = C(\beta + 1, \gamma)$ alors $\text{cof}(\alpha) = \omega$ et
 $\alpha[0] = \gamma, \alpha[k + 1] = C(\beta, \alpha[k])$
- si $\alpha = C(\beta, \gamma)$ et β est une limite :
si $\text{card}(\beta) = \omega$ ou $\text{card}(\beta) \leq \text{card}(\gamma)$, $\text{cof}(\alpha) = \text{cof}(\beta)$ et
 $\alpha[\eta] = C(\beta[\eta], \gamma)$
sinon $\text{cof}(\alpha) = \omega$ et $\alpha[0] = 0, \alpha[k + 1] = C(\beta[\alpha[k]], \gamma)$

La notation de Taranovsky

Les suites fondamentales des ordinaux de cofinalité ω peuvent aussi être définies par:

$$\alpha[n] = \max\{\beta \mid L(\beta) = n \wedge \beta < \alpha\}$$

où $L(\beta)$ désigne le nombre d'occurrences de C dans la représentation standard de β .

Exemples d'ordinaux dans la notation de Taranovsky

- $0 = 0$
- $1 = 0 + \omega^0 = C(0, 0)$
- $2 = 1 + \omega^0 = C(0, 1) = C(0, C(0, 0))$
- $\omega = 0 + \omega^1 = C(1, 0) = C(C(0, 0), 0)$
- $\omega + 1 = \omega + \omega^0 = C(0, \omega) = C(0, C(1, 0))$
- $\omega \cdot 2 = \omega + \omega^1 = C(1, \omega) = C(1, C(1, 0))$
- $\omega^2 = 0 + \omega^2 = C(2, 0)$
- $\omega^\omega = 0 + \omega^\omega = C(\omega, 0) = C(C(1, 0), 0)$
- $\omega^{\omega^\omega} = 0 + \omega^{\omega^\omega} = C(\omega^\omega, 0) = C(C(C(1, 0), 0), 0)$
- $\varepsilon_0 = \varphi(1, 0) = \varphi'(0, 1) = C(\Omega_1, 0)$
- $\varepsilon_1 = \varphi(1, 1) = \varphi'(0, 2) = C(\Omega_1, C(\Omega_1, 0))$ (notez que la correspondance avec φ' est plus simple que avec φ)
- $\zeta_0 = \varphi(2, 0) = \varphi'(1, 1) = C(C(\Omega_1, \Omega_1), 0) = C(\Omega_1 \cdot 2, 0)$ avec $\Omega_1 \cdot 2 = C(\Omega_1, \Omega_1)$
- $\zeta_1 = \varphi(2, 1) = \varphi'(1, 2) = C(\Omega_1 \cdot 2, C(\Omega_1 \cdot 2, 0))$
- $\eta_0 = \varphi(3, 0) = \varphi'(2, 1) = C(\Omega_1 \cdot 3, 0)$ with $\Omega_1 \cdot 3 = C(\Omega_1, C(\Omega_1, \Omega_1))$
- $\Gamma_0 = \varphi(1, 0, 0) = \varphi'(1, 0, 1) = C(C(\Omega_1 \cdot 2, \Omega_1), 0) = C(\Omega_1^2, 0)$ avec $\Omega_1^2 = C(\Omega_1 \cdot 2, \Omega_1)$
- $\Gamma_1 = C(\Omega_1^2, C(\Omega_1^2, 0))$
- $\Gamma_\omega = C(\Omega_1^2 + 1, 0)$
- Petit ordinal de Veblen = $C(\Omega_1^\omega, 0)$
- Grand ordinal de Veblen = $C(\Omega_1^{\Omega_1}, 0)$
- Ordinal de Bachmann Howard = $C(C(\Omega_2, \Omega_1), 0)$

Un avis de David Madore sur la notation de Taranovsky :

” Un certain Dmytro Taranovsky prétend avoir développé des systèmes de notations qui dépassent l'ordinal de preuve de l'arithmétique du second ordre et monte peut-être jusqu'à l'ordinal de preuve de ZFC. Il ne prétend pas avoir de preuve de ces affirmations, mais, même comme ça, j'avoue que je suis assez sceptique : pas tellement parce que l'auteur n'a ni fait de thèse de maths ni jamais rien publié formellement (je n'aime vraiment pas invoquer ce genre de critères, et en l'occurrence il ne vaut vraiment pas grand-chose parce qu'il est clair que l'auteur est au même passablement compétent dans ce qu'il écrit), mais surtout parce que je trouve très suspect de ne pas voir apparaître dans son système la complexité des hiérarchies d'écrasement qu'on voit dans celui de Stegert, et la facilité avec laquelle il prétend monter dans la hiérarchie preuve-théorique est quand même un peu incroyable. Mais je ne suis pas non plus complètement convaincu qu'il ait tort (au pif, je dirais que son système est bien-fondé, mais n'a pas la puissance qu'il croit qu'il a).”

David Madore, Petit guide bordélique de quelques ordinaux intéressants

Ordinal de preuve d'une théorie (proof theoretic ordinal)

L'ordinal de preuve d'une théorie est une mesure de la puissance de cette théorie. L'ordinal de preuve d'une théorie T peut être défini de différentes façons équivalentes :

- Le plus petit ordinal récursif tel que cette théorie ne permet pas de démontrer que cet ordinal est bien fondé
- Le supremum de tous les ordinaux pour lesquels il existe une notation telle que la théorie permet de démontrer que cette notation est une notation d'ordinaux
- Le supremum de tous les ordinaux α tels qu'il existe une relation récursive R sur ω qui l'ordonne selon un bon ordre avec α et tel que T permet de démontrer l'induction transfinie sur les énoncés arithmétiques de R .

Par exemple, l'ordinal de preuve de l'arithmétique de Peano est ε_0 .

Tableau de correspondances

Nom	Symbole	Algébrique	Veblen	Simmons	RHS0	Madore	Taranovsky
Zero	0	0			0		0
Un	1	1	$\varphi(0, 0)$		suc 0		$C(0, 0)$
Deux	2	2			suc (suc 0)		$C(0, C(0, 0))$
Omega	ω	ω	$\varphi(0, 1)$	ω	H suc 0		$C(1, 0)$
		$\omega + 1$			suc (H suc 0)		$C(0, C(1, 0))$
		$\omega \times 2$			H suc (H suc 0)		$C(1, C(1, 0))$
		ω^2	$\varphi(0, 2)$		H (H suc) 0		$C(C(0, C(0, 0)), 0)$
		ω^ω	$\varphi(0, \omega)$		H H suc 0		$C(C(1, 0), 0)$
Epsilon zero	ε_0	ε_0	$\varphi(1, 0)$	Next ω	$R_1 H$ suc 0	$\psi(0)$	$C(\Omega_1, 0)$
		ε_1	$\varphi(1, 1)$	Next ² ω	$R_1 (R_1 H)$ suc 0	$\psi(1)$	$C(\Omega_1, C(\Omega_1, 0))$
		ε_ω	$\varphi(1, \omega)$	Next ^{ω} ω	$HR_1 H$ suc 0	$\psi(\omega)$	$C(C(0, \Omega_1), 0)$
		$\varepsilon_{\varepsilon_0}$	$\varphi(1, \varphi(1, 0))$	Next ^{Nextω} ω	$R_1 HR_1 H$ suc 0	$\psi(\psi(0))$	$C(C(C(\Omega_1, 0), \Omega_1), 0)$
Zeta zero	ζ_0	ζ_0	$\varphi(2, 0)$	[0]Next ω	$R_2 R_1 H$ suc 0	$\psi(\Omega)$	$C(C(\Omega_1, \Omega_1), 0)$
Eta zero	η_0	η_0	$\varphi(3, 0)$	[0] ² Next ω	$R_2 (R_2 R_1) H$ suc 0		$C(C(\Omega, C(\Omega, \Omega)), 0)$
			$\varphi(\omega, 0)$	[0] ^{ω} Next ω	$HR_2 R_1 H$ suc 0		$C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Feferman-Schütte	Γ_0	Γ_0	$\varphi(1, 0, 0)$ $= \varphi(2 \mapsto 1)$	[1][0]Next ω	$R_3 R_2 R_1 H$ suc 0 $= R_{3 \dots 1} H$ suc 0	$\psi(\Omega^\Omega)$	$C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Ackermann			$\varphi(1, 0, 0, 0)$ $= \varphi(3 \mapsto 1)$	[1] ² [0]Next ω	$R_3 (R_3 R_2) R_1 H$ suc 0	$\psi(\Omega^{\Omega^2})$	
Petit Veblen			$\varphi(\omega \mapsto 1)$	[1] ^{ω} [0]Next ω	$HR_3 R_2 R_1 H$ suc 0	$\psi(\Omega^{\Omega^\omega})$	$C(\Omega^\omega, 0)$ $= C(C(C(0, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Grand Veblen			+ petit ord. non rep.	[2][1][0]Next ω	$R_4 R_3 R_2 R_1 H$ suc 0 $= R_{4 \dots 1} H$ suc 0	$\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$	$C(\Omega_1^{\Omega_1}, 0)$ $= C(C(C(C(\Omega_1, \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), \Omega_1), 0)$
Bachmann-Howard				+ petit ord. non rep.	$R_\omega \dots 1 H$ suc 0	$\psi(\varepsilon_{\Omega+1})$	$C(C(\Omega_2, \Omega_1), 0)$