Les multiplicateurs de Lagrange

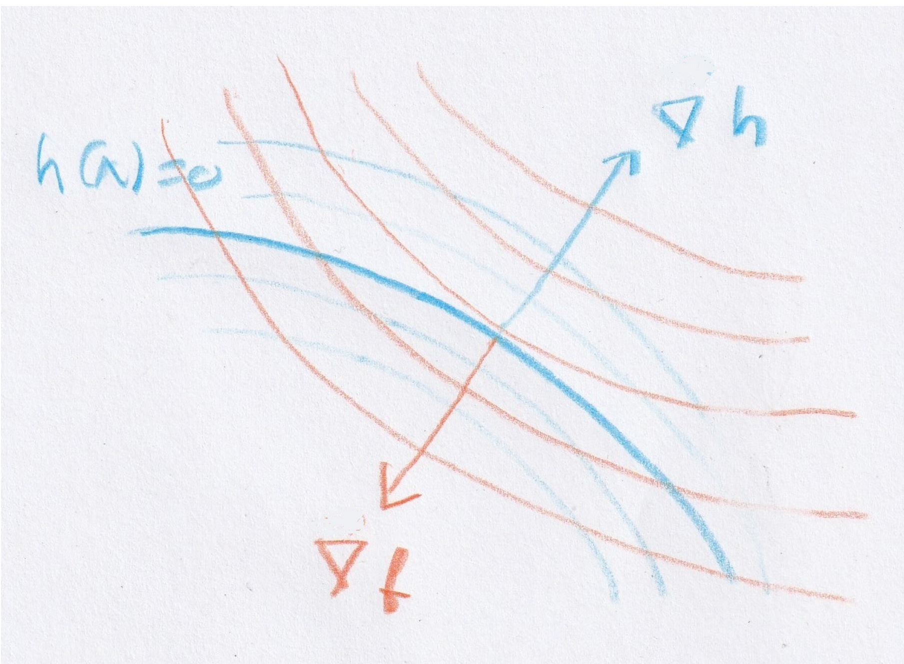
Jacques Bailhache (jacques.bailhache@gmail.com)

July 28, 2020

1 Exemple dans un espace de dimension 2

Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
L'équation h(x)=0 définit une courbe dans $\mathbb{R}^2$.
Soit une autre fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
On cherche le point x de la courbe h(x)=0 qui minimise f, autrement dit x tel que :

- h(x)=0
- f(x) est minimal



On voit que x est le point où la courbe h(x)=0 est tangente à une courbe de niveau de f. Le gradient de f en ce point est perpendiculaire à la courbe h(x)=0. Le gradient de h étant également perpendiculaire à la courbe h(x)=0, les gradients de f et h sont alignés ou proportionnels, ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla h(x) = 0$$

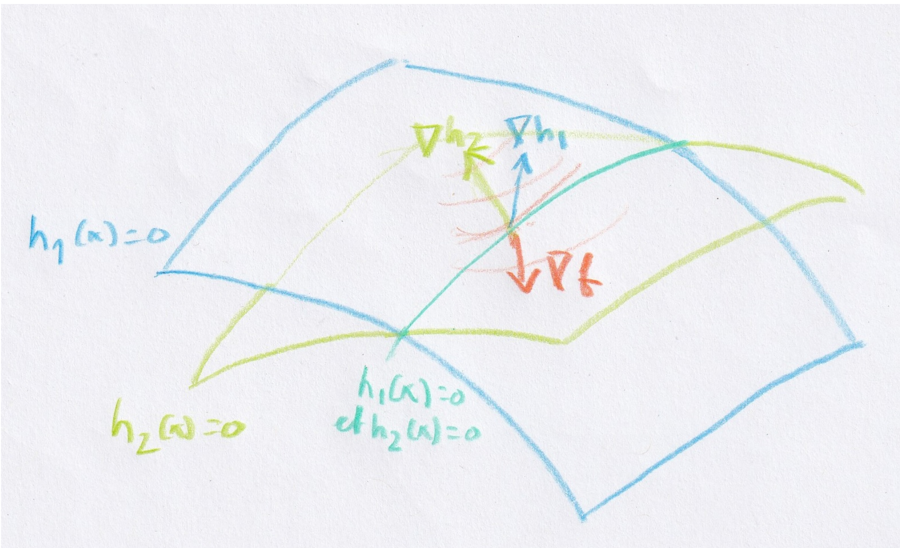
2 Exemple dans un espace de dimension 3

Soit deux fonction h_1 et $h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
L'équation $h_1(x) = 0$ définit une surface. L'équation $h_2(x) = 0$ définit une autre surface. La courbe C intersection de ces deux surfaces satisfait le système d'équations

- $h_1(x) = 0$
- $h_2(x) = 0$

On cherche le point x de cette courbe qui minimise une certaine fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, autrement dit x tel que :

- $h_1(x) = 0$
- $h_2(x) = 0$
- f(x) est minimal



Le point x est le point où la courbe C est tangente à une surface où f a la même valeur. On a :

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) = 0$$

3 Cas général

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère p+1 fonctions $h_1, ..., h_p, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
On cherche x tel que

- $h_1(x) = 0$
- $\ldots$
- $h_p(x) = 0$
- f(x) est minimal

Ce point x vérifie :

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \ldots + \lambda_p \nabla h_p(x) = 0$$

On définit le lagrangien L par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \ldots + \lambda_p h_p(x)$$

On a alors :

$$\nabla L(x, \lambda) = \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \ldots + \lambda_p h_p(x)$$

La condition $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \ldots + \lambda_p \nabla h_p(x) = 0$ peut donc s'écrire :

$$\nabla L(x, \lambda) = 0$$

ou

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = 0$$

On peut également réécrire la condition $h_j(x) = 0$ sous la forme :

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} = 0$$