Electromagnétisme et gravitation relativistes, champs de jauge et théorie de Kaluza-Klein

Jacques Bailhache (jacques.bailhache@gmail.com)

July 17, 2020

1 Vecteurs et formes linéaires

Les vecteurs d'un espace vectoriel sont représentés par des matrices colonnes ou, en notation d'einstein, avec un indice en haut. Ils sont dits contravariants. Les formes linéaires sont représentées par des matrices lignes ou, en notation d'Einstein, avec un indice en bas. Elles sont dites covariantes. Les formes linéaires sont aussi appelées vecteurs covariants. On peut définir une forme linéaire à partir d'un vecteur (le produit scalaire par ce vecteur) en utilisant le tenseur métrique g, par exemple :

$$a_k = g_{kl} v^l$$

2 Métrique de l'espace-temps relativiste

Un point de l'espace-temps relativiste correspond à un point de l'espace à un instant donné. Il est repéré par 4 coordonnées t, x, y, z que l'on peut représenter par le vecteur :

$$x^k = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les expressions, on peut choisir un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière c vaut 1. On a alors :

$$x^k = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons une métrique de signature (+ - - -) dans laquelle la longueur d'un vecteur de l'espace-temps est définie par :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

ou avec c = 1 :

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

On définit le tenseur métrique g_{kl} tel que la longueur du vecteur x^k soit $g_{kl}x^kx^l$. En notation d'Einstein, la sommation est implicite sur les indices correspondants : $g_{kl}x^kx^l = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_{kl}x^kx^l$ On a alors :

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Certains auteurs utilisent une métrique de signature (- + + +) dans laquelle la longueur d'un vecteur de l'espace-temps est définie par :

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

ou avec c = 1 :

$$-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

ce qui correspond au tenseur métrique :

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est $g_{kl}x^k y^l$.

Quand on passe d'un vecteur contravariant à un vecteur covariant en utilisant le tenseur métrique, les composantes x, y et z changent de signe, par exemple si le vecteur contravariant J (densité de courant) a pour composantes :

$$(J^k) = \begin{pmatrix} \rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$$

alors le vecteur contravariant correspondant aura pour composantes, dans la métrique de signature (+ - - -) :

$$(J_k) = J^m g_{mk} = \begin{pmatrix} \rho & -J_x & -J_y & -J_z \end{pmatrix}$$

Une possiblilté pour éviter ces changements de signes consiste à représenter un vecteur de l'espace-temps avec des composantes spatiales imaginaires pures (avec $i^2 = -1$) :

$$x'^k = \begin{pmatrix} t \\ ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix}$$

Avec le tenseur métrique de signature (+ + + +) :

$$\bar{g}_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la longueur du vecteur est bien $\bar{g}_{kl}x'^k x'^l = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.
En définissant la matrice de changement de base :

$$P^k_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

on peut effectuer la conversion entre coordonnées réelles et coordonnées complexes en utilisant les formules $x'^k = P^k_l x^l$ et $x^k = {P^{-1}}^k_l x'^l$.
Pour un vecteur covariant, on a $x'_k = {P^{-1}}^l_k x_l$ et $x_k = P^l_k x'_l$.
Ces formules se généralisent pour un tenseur quelconque n fois contravariant et p fois covariant.

On pourrait aussi faire de même en se basant sur la signature (- + + +) avec

$$P^k_l = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voir à ce sujet : `http://joelsornette.fr/ressources/textes/cours310-1b.pdf` ou `http://log.chez.com/text/physics/cours310-1b.pdf`.

3 Electromagnétisme relativiste

3.1 Métrique de signature (+ - - -)

l'espace-temps de la relativité comporte 4 dimensions : une dimension de temps et 3 dimensions d'espace. Les vecteurs de cet espace-temps, appelés quadrivecteurs, ont donc 4 composantes : une composante temporelle et 3 composantes spatiales, désignées respectivement par les lettres t, x, y, z.
Les lois de l'électromagnétismes déterminent le comportement de corps chargés dans un champ électromagnétique, lui-même produit par des corps chargés. Un corps est caractérisé par sa masse m et sa charge électrique q.
Dans le cas non relativiste (vitesse très inférieure à la vitesse de la lumière), on a approximativement :

$$v^k = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Le champ électromagnétique est représenté par un tenseur F dont les composantes sont celles du champ électrique E et du champ magnétique B.
Pour simplifier les formules, nous utiliserons un système d'unités où $c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.
Dans un tel système, le tenseur F mixte (contravariant et covariant) a pour composantes :

$$(F^k_l) = \begin{pmatrix} F^t_t & F^t_x & F^t_y & F^t_z \\ F^x_t & F^x_x & F^x_y & F^x_z \\ F^y_t & F^y_x & F^y_y & F^y_z \\ F^z_t & F^z_x & F^z_y & F^z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(Dans un système d'unités où c est différent de 1, les composantes du champ électrique E doivent être divisées par c.)
On peut construire les composantes deux fois contravariantes de ce tenseur grâce à la formule :

$$F^{kl} = F^k_m g^{ml}$$

avec

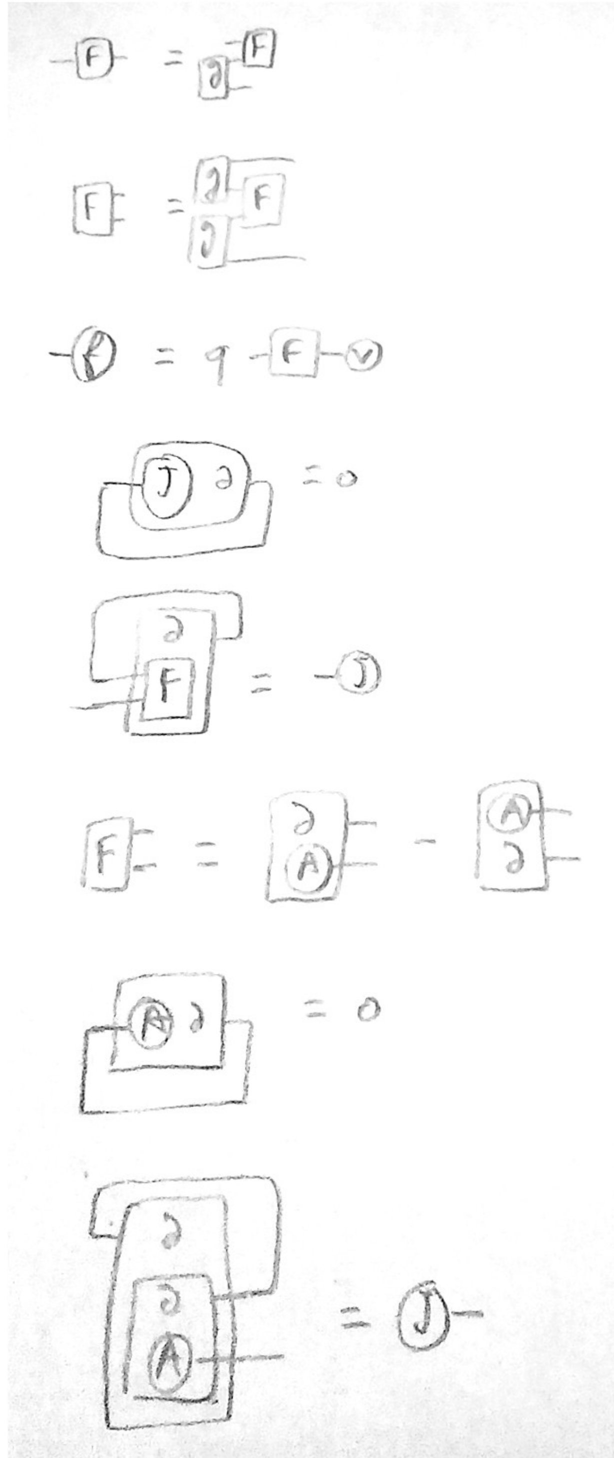
$$g^{ml} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$F^{kl} = \begin{pmatrix} F^{tt} & F^{tx} & F^{ty} & F^{tz} \\ F^{xt} & F^{xx} & F^{xy} & F^{xz} \\ F^{yt} & F^{yx} & F^{yy} & F^{yz} \\ F^{zt} & F^{zx} & F^{zy} & F^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

On peut construire de même les composantes deux fois covariantes par la formule :

$$F_{kl} = g_{km} F^m_l = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$



La force électromagnétique exercée sur un corps de charge q se déplaçant à une vitesse v est :

$$f^k = qF^k_l v^l$$

Dans le cas non relativiste (vitesse très inférieure à la vitesse de la lumière), on retrouve la formule :

$$f = q(E + v \wedge B)$$

Le champ électromagnétique est déterminé par la densité de courant relativiste J dont la composante temporelle correspond à la densité de charge et les composantes spatiales à la densité de courant :

$$(J^k) = \begin{pmatrix} \rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$$

La densité de courant relativiste est aussi le produit de la densité de charge par la vitesse.
La densité de courant a pour composantes en coordonnées covariantes :

$$(J_k) = J^m g_{mk} = \begin{pmatrix} \rho & -J_x & -J_y & -J_z \end{pmatrix}$$

Elle vérifie l'équation de conservation :

$$\partial_i J^k = 0$$

Le champ est lié à la densité de courant par l'équation :

$$\partial_k F^{kl} = J^l$$

avec la contrainte sur le champ :

$$\partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl} = 0$$

que l'on peut aussi écrire de façon plus compacte :

$$\varepsilon^{klmn} \partial_l F_{mn} = 0$$

On peut aussi déterminer le champ par l'intermédiaire du potentiel. Les composantes de ce quadrivecteur sont le potentiel scalaire V et les 3 composantes du potentiel vecteur A :

$$(A^k) = \begin{pmatrix} V \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

ou en coordonnées covariantes :

$$A_k = A^l g_{lk} = \begin{pmatrix} V & -A_x & -A_y & -A_z \end{pmatrix}$$

Le champ F peut s'exprimer en fonction du potentiel par la formule :

$$F^{kl} = \partial^k A^l - \partial^l A^k$$

ou en coordonnées covariantes :

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$$

Etant donné que, pour un champ donné, la formule ci-dessus ne détermine pas un potentiel unique, on introduit une contrainte supplémentaire appelée jauge de Lorentz :

$$\partial_k A^k = 0$$

On a alors :

$$\partial_k F^{kl} = \partial_k(\partial^k A^l - \partial^l A^k) = \partial_k \partial^k A^l - \partial_k \partial^l A^k = \partial_k \partial^k A^l - \partial^l \partial_k A^k = \partial_k \partial^k A^l - \partial^l 0 = \partial_k \partial^k A^l$$

Mais nous avons vu précédemment que :

$$\partial_k F^{kl} = J^l$$

On a donc :

$$\partial_k \partial^k A^l = J^l$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Box A = J$$

On peut voir le potentiel A comme le gradient d'un scalaire ϕ appelé phase. Si on part d'un point x^i avec une phase ϕ et qu'on se déplace vers un point $x^k + dx^k$, la phase en ce nouveau point est $\phi + d\phi = \phi + A_k dx^k$.
Si on part d'un point avec une phase ϕ et qu'on effectue une boucle infinitésimale selon deux coordonnées, par exemple +dx+dy-dx-dy, on revient au point de départ avec une phase $\phi + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dxdy = \phi + F_{xy} dxdy$.
(voir http://log.chez.com/text/physics/gfkk_fr.pdf).

3.2 Métrique de signature (- + + +)

Rappelons que dans cette métrique, le tenseur métrique est :

$$(g_{kl}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les formules sont similaires mais le signe de certaines composantes des tenseurs change parfois. Les composantes de F^k_l sont les mêmes, mais on a :

$$F^{kl} = F^k_m g^{ml} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} ; F_{kl} = g_{km} F^m_l = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes de J^k sont les mêmes mais on a en coordonnées covariantes :

$$(J_k) = J^m g_{mk} = \begin{pmatrix} -\rho & J_x & J_y & J_z \end{pmatrix}$$

Les composantes de A^k sont les mêmes mais on a en coordonnées covariantes :

$$A_k = A^l g_{lk} = \begin{pmatrix} -V & A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

La formule $\Box A = J$ devient $\Box A = -J$ avec la métrique de signature (- + + +).

3.3 Métrique de signature (+ + + +) avec composantes complexes

Dans cette métrique, pour les vitesses faibles comparées à la vitesse de la lumière, le quadrivecteur vitesse a pour composantes

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ iv_x \\ iv_y \\ iv_z \end{pmatrix}$$

Le tenseur champ F, quelle que soit sa contravariance ou sa covariance, a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & -iE_x & -iE_y & -iE_z \\ iE_x & 0 & B_z & -B_y \\ iE_y & -B_z & 0 & B_x \\ iE_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

La formule :

$$f^k = qF_l^k v^l$$

donne :

$$f = \begin{pmatrix} qE.v \\ q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \\ q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \end{pmatrix}$$

Si on considère les composantes spatiales, on retrouve bien la formule :

$$f = q(E + v \wedge B)$$

Le vecteur densité de courant J, quelle que soit sa contravariance ou sa covariance, a pour composantes $\begin{pmatrix} \rho & iJ_x & iJ_y & iJ_z \end{pmatrix}$.
Le vecteur potentiel A, quelle que soit sa contravariance ou sa covariance, a pour composantes $\begin{pmatrix} V & iA_x & iA_y & iA_z \end{pmatrix}$.

4 Connexion affine

Dans un espace (ou espace-temps) muni d'un système de coordonnées curvilignes, le transport parallèle d'un vecteur v^k déplacé de dx^m donne un vecteur de composantes $v^k - \Gamma^k_{lm} v^l dx^m$ où Γ est le tableau des coefficients de connexion affine. A noter que Γ n'est pas un tenseur car il n'obéit pas aux règles de changement de base.

Dans un déplacement géodésique, la vitesse est constante en transport parallèle dans sa propre direction. l'équation des géodésiques est donc :

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma^k_{lm} v^l v^m$$

La force gravitationnelle exercée sur un corps de masse m se déplaçant à la vitesse v est considérée en relativité générale comme résultant de la courbure de l'espace-temps et peut donc s'écrire :

$$f^k = m \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -m\Gamma^k_{lm} v^l v^m$$

5 Idée de la théorie de Kaluza-Klein

Comparons la force gravitationnelle :

$$f^k = m\frac{d^2x^k}{dt^2} = -m\Gamma^k_{lm}v^l v^m$$

et la force électromagnétique vue précédemment :

$$f^k = qF^k_l v^l$$

On remarque une certaine similitude dans ces expressions : produit d'une caractéristique (masse ou charge) du corps soumis à la force par un ensemble de composants représentant la force (Γ ou F) et par la vitesse qui apparaît deux fois pour la force gravitationnelle et une seule fois pour la force électromagnétique.
l'idée consiste à fusionner ces deux équations en une seule, avec un seul ensemble de coefficients $\widetilde{\Gamma}$ représentant à la fois la force gravitationnelle et la force électromagnétique, en ajoutant une dimension supplémentaire u dont la courbure correspond au champ électromagnétique, dimension non perceptible car enroulée en un cercle très petit. On est donc dans un espace à 5 dimensions (t, x, y, z, u) ou (0, 1, 2, 3, 4). Les coefficients de Γ apparaissent dans les coefficients d'indices t, x, y, z de $\widetilde{\Gamma}$ et les composantes de F apparaissent dans les coefficients de $\widetilde{\Gamma}$ pour lesquels un des indices est u.

6 Formalisme des tétrades (vierbein)

On considère un espace plat tangent à un espace courbe en un point donné, une base orthonormée de cet espace plat, et une matrice e de changement de base. Le tenseur métrique peut alors s'écrire :

$$g_{kl} = \eta_{mn}e^m_k e^n_l$$

où η est la métrique de l'espace plat.
Un espace de type Kaluza-Klein est le produit de l'espace-temps à 4 dimensions étendues par un espace "intérieur" à une dimension compactifiée (un cercle) dans le cas de l'électromagnétisme mais qui peut avoir un nombre quelconque de dimensions dans le cas général d'un champ de jauge quelconque. Nous désignerons par des lettres simples les grandeurs concernant l'espace de type Kaluza-Klein, par des lettres surmontées d'une barre les grandeurs concernant l'espace-temps à 4 dimensions, et par des lettres surmontées d'un cercle les grandeurs concernant l'espace "intérieur".

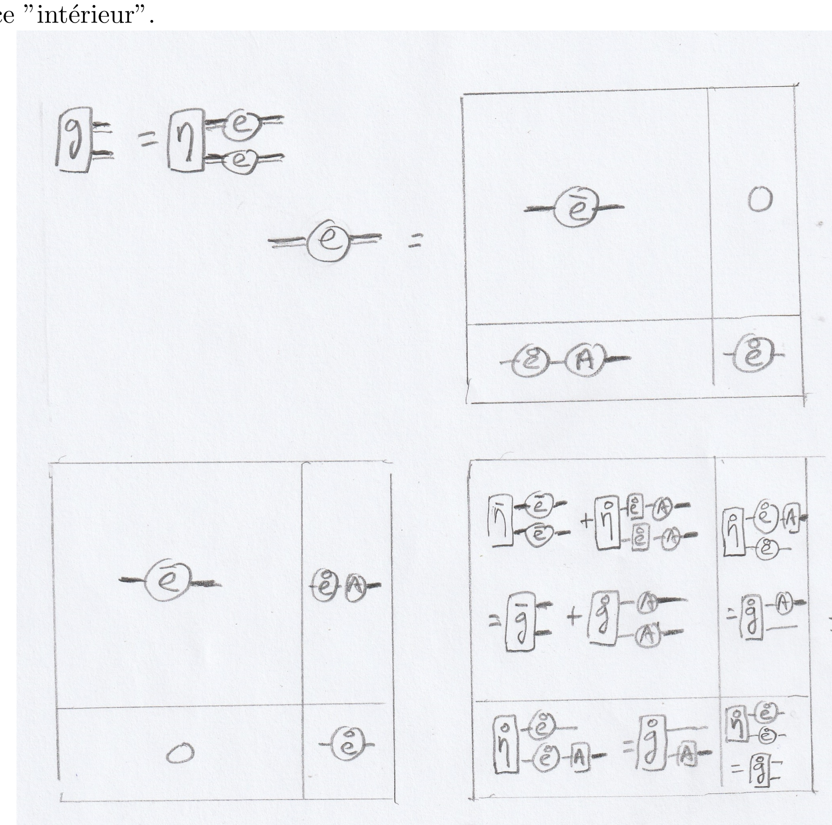
La tétrade d'une espace de type Kaluza-Klein a la forme suivante :

$$e^k_l = \begin{pmatrix} \bar{e}^{\bar{k}}_{\bar{l}} & 0 \\ \mathring{e}^{\mathring{k}}_{\mathring{m}} A^{\mathring{m}}_{\bar{l}} & \mathring{e}^{\mathring{k}}_{\mathring{l}} \end{pmatrix}$$

Le calcul de $g_{kl} = \eta_{mn}e^m_k e^n_l$ donne :

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\bar{m}\bar{n}}\bar{e}^{\bar{m}}_{\bar{k}}\bar{e}^{\bar{n}}_{\bar{l}} + \mathring{\eta}_{\mathring{m}\mathring{n}}\mathring{e}^{\mathring{m}}_{\mathring{p}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}}\mathring{e}^{\mathring{n}}_{\mathring{q}}A^{\mathring{q}}_{\bar{l}} & \mathring{\eta}_{\mathring{m}\mathring{n}}\mathring{e}^{\mathring{n}}_{\mathring{p}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}}\mathring{e}^{\mathring{n}}_{\mathring{l}} \\ \mathring{\eta}_{\mathring{m}\mathring{n}}\mathring{e}^{\mathring{m}}_{\mathring{k}}\mathring{e}^{\mathring{n}}_{\mathring{p}}A^{\mathring{p}}_{l'} & \mathring{\eta}_{\mathring{m}\mathring{n}}\mathring{e}^{\mathring{m}}_{\mathring{k}}\mathring{e}^{\mathring{n}}_{\mathring{l}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{g}_{\bar{k}\bar{l}} + \mathring{g}_{\mathring{p}\mathring{q}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}}A^{\mathring{q}}_{\bar{l}} & \mathring{g}_{\mathring{p}\mathring{l}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}} \\ \mathring{g}_{\mathring{k}\mathring{p}}A^{\mathring{p}}_{\bar{l}} & \mathring{g}_{\mathring{k}\mathring{l}} \end{pmatrix}$$



De même le tenseur métrique contravariant s'écrit :

$$g^{kl} = E^k_m E^l_n \eta^{mn}$$

avec

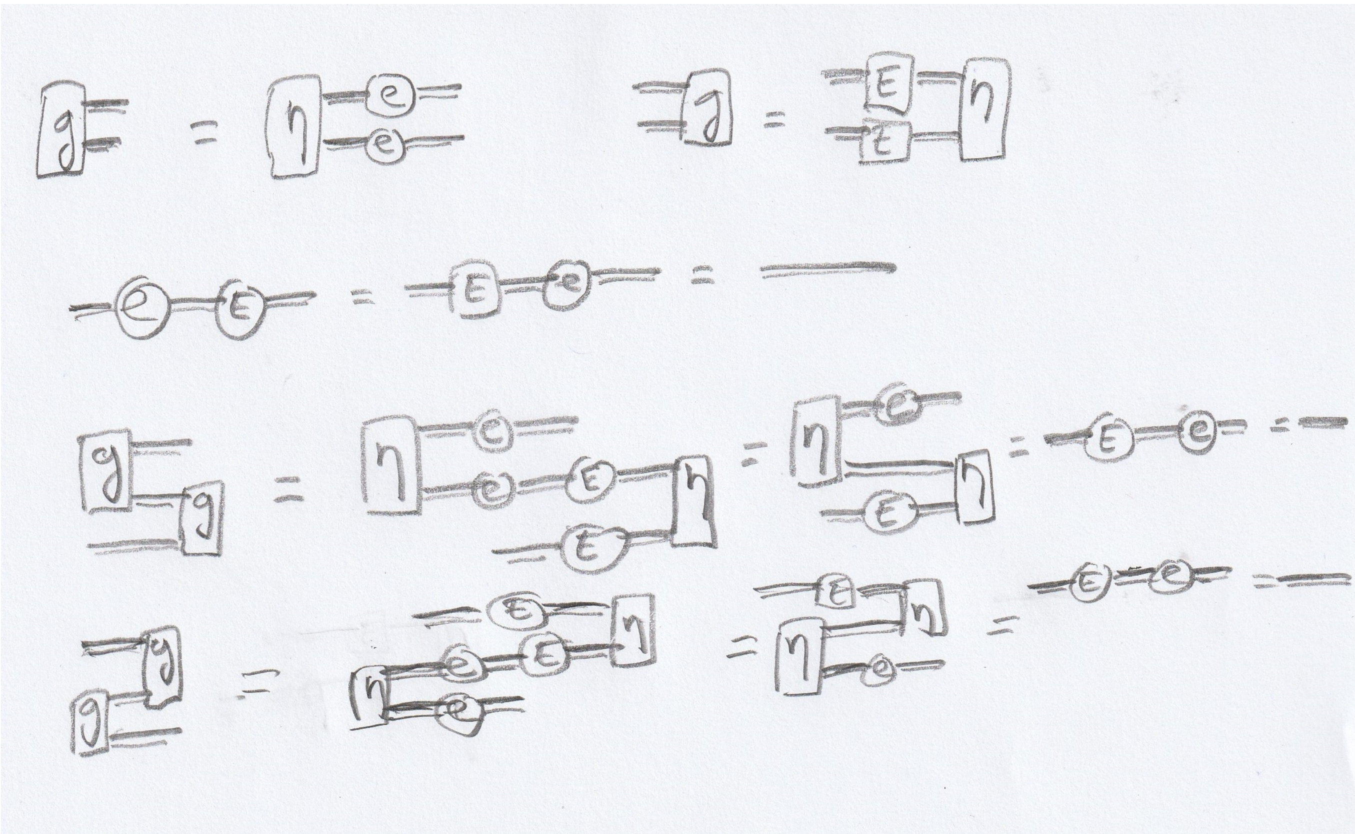
$$e^k_l E^l_m = E^k_l e^l_m = \delta^k_m$$

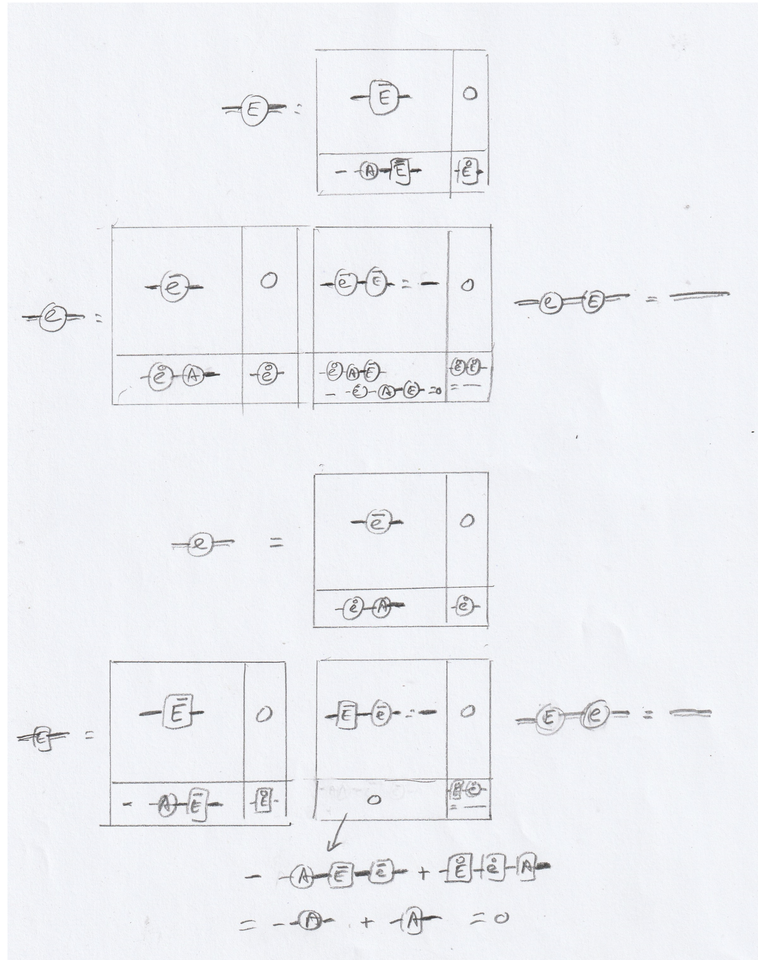
de sorte que

$$g^{kl} g_{lm} = E^k_n \eta^{np} E^l_p e^q_l \eta_{qr} e^r_m = E^k_n \eta^{np} \eta_{pr} e^r_m = E^k_n e^n_m = \delta^k_m$$

et

$$g^{lk} g_{ml} = E^k_n \eta^{pn} E^l_p e^q_l \eta_{rq} e^r_m = E^k_n \eta^{pn} \eta_{rp} e^r_m = E^k_n e^n_m = \delta^k_m$$



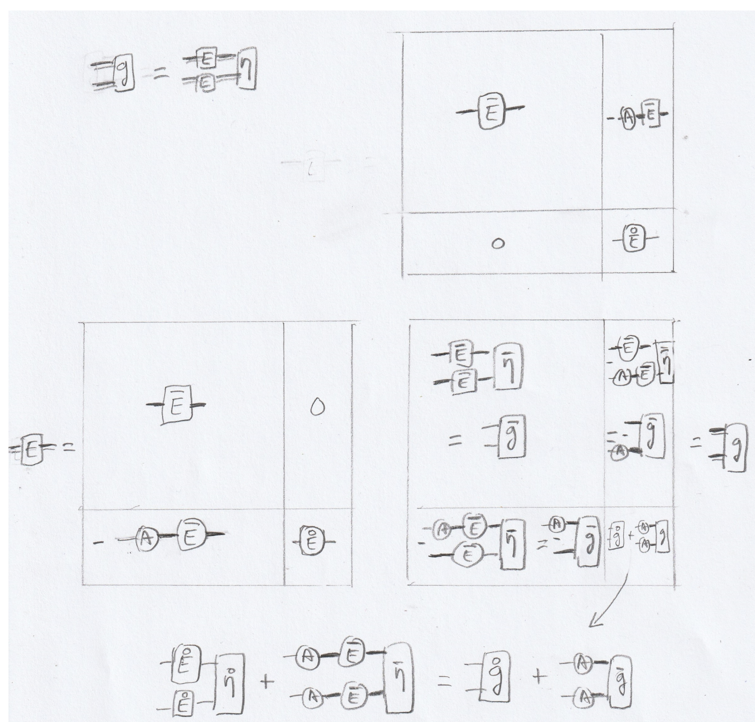


Pour un espace de type Kaluza-Klein, la tétrade correspondant au tenseur métrique contravariant est :

$$E_l^k = \begin{pmatrix} \bar{E}_{\bar{l}}^{\bar{k}} & 0 \\ -A_{\bar{m}}^{\mathring{k}} \bar{E}_{\bar{l}}^{\bar{m}} & \mathring{E}_{\mathring{l}}^{\mathring{k}} \end{pmatrix}$$

On peut facilement vérifier qu'on a :

$$e_l^k E_m^l = E_l^k e_m^l = \delta_m^k$$



Le calcul de $g^{kl} = E_m^k E_n^l \eta^{mn}$ donne :

$$g^{kl} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{\bar{m}}^{\bar{k}} \bar{E}_{\bar{n}}^{\bar{l}} \bar{\eta}^{\bar{m}\bar{n}} & -\bar{E}_{\bar{m}}^{\bar{k}} A_{\bar{n}}^{\mathring{l}} \bar{E}_{\bar{p}}^{\bar{n}} \bar{\eta}^{\bar{m}\bar{p}} \\ -A_{\bar{m}}^{\mathring{k}} \bar{E}_{\bar{n}}^{\bar{m}} \bar{E}_{\bar{p}}^{\bar{l}} \bar{\eta}^{\bar{n}\bar{p}} & \mathring{E}_{\mathring{m}}^{\mathring{k}} \mathring{E}_{\mathring{n}}^{\mathring{l}} \mathring{\eta}^{\mathring{m}\mathring{n}} + A_{\bar{m}}^{\mathring{k}} \bar{E}_{\bar{n}}^{\bar{m}} A_{\bar{p}}^{\mathring{l}} \bar{E}_{\bar{q}}^{\bar{p}} \bar{\eta}^{\bar{n}\bar{q}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{g}^{\bar{k}\bar{l}} & -A_{\bar{m}}^{\mathring{l}} \bar{g}^{\bar{k}\bar{m}} \\ -A_{\bar{m}}^{\mathring{k}} \bar{g}^{\bar{m}\bar{l}} & \mathring{g}^{\mathring{k}\mathring{l}} + A_{\bar{m}}^{\mathring{k}} A_{\bar{n}}^{\mathring{l}} \bar{g}^{\bar{m}\bar{n}} \end{pmatrix}$$

7 Indices décalés

Nous avons vu des matrices constituées de 4 sous-matrices juxtaposées en carré. Habituellement, les lignes et les colonnes de chaque matrice sont numérotées de 1 à n ou de 0 à n-1. Même si on désigne les indices par des lettres, par exemple t, x, y, z, u, on représente la matrice avec des lignes et des colonnes dans un certain ordre, ces lignes et ces colonnes peuvent donc être numérotées en fonction de leur position.
Si par exemple on superpose une matrice A de n lignes numérotées de 0 à n-1 avec une matrice B de p lignes numérotées de 0 à p-1, on obtient une matrice C de q=n+p lignes numérotées de 0 à q-1. Les lignes de A gardent leurs numéros mais les numéros des lignes de B sont augmentés de n dans C. On pourrait définir une opération de superposition de matrices. Une autre possibilité consiste à considérer la matrice B comme une matrice à q lignes dont les n premières lignes sont nulles. On peut alors écrire C = A + B. De même, si on juxtapose horizontalement des matrices A à n colonnes et B à p colonnes, on peut considérer la matrice B comme une matrice à n+p colonnnes avec les n premières colonnes nulles et écrire C = A + B. On peut généraliser cette idée à une matrice constituée d'un nombre quelconque de sous-matrices superposées et/ou juxtaposées, et à des tenseurs à un nombre quelconque d'indices.
Dans le cas de la théorie de type Kaluza-Klein, on peut attribuer des indices différents aux dimensions étendues et compactifiées, par exemple: t=0, x=1, y=2, z=3 et 4 à d-1 (où d est la dimension de l'espace-temps total) pour les dimensions compactifiées, et considérer que les indices de tous les tenseurs varient de 0 à d-1, en complétant avec des 0. Avec cette convention, on représente par exemple le potentiel vecteur par une matrice constituée de 4 sous-matrices disposées en carré, dont seule celle située en bas à gauche a des composantes non nulles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{\mathring{k}}_{\bar{l}} & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique s'écrit alors :
$g_{kl} = \eta_{mn} e^m_k e^n_l = \eta_{mn}(\bar{e}^m_k + \mathring{e}^m_k + \mathring{e}^m_p A^p_k)(\bar{e}^n_l + \mathring{e}^n_l + \mathring{e}^n_q A^q_l)$
$= \eta_{mn}\bar{e}^m_k\bar{e}^n_l + \eta_{mn}\bar{e}^m_k\mathring{e}^n_l + \eta_{mn}\bar{e}^m_k\mathring{e}^n_q A^q_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_k\bar{e}^n_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_k\mathring{e}^n_q + \eta_{mn}\mathring{e}^m_k\mathring{e}^n_q A^q_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_p A^p_k\bar{e}^n_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_p A^p_k\mathring{e}^n_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_p A^p_k\mathring{e}^n_q A^q_l$

(Remarque : les indices ne sont plus surmontés de barres ou de cercles car on considère ici qu'ils peuvent prendre pour valeurs toutes les dimensions étendues ou compactifiées, la composante correspondante étant éventuellement nulle.)

Etant donné que $\eta_{mn}\bar{e}^m_k\mathring{e}^n_l = 0$ car η_{mn} est non nul pour m = n, $\bar{e}^m_k$ ne peut être non nul que pour m compris entre 0 et 3 (ou m = t, x, y ou z), et $\mathring{e}^n_l$ ne peut être non nul que pour n strictement supérieur à 3, et de même $\eta_{mn}\mathring{e}^m_k\bar{e}^n_l = 0$, on peut simplifier :

$g_{kl} = \eta_{mn}\bar{e}^m_k\bar{e}^n_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_k\mathring{e}^n_q + \eta_{mn}\mathring{e}^m_k\mathring{e}^n_q A^q_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_p A^p_k\mathring{e}^n_l + \eta_{mn}\mathring{e}^m_p A^p_k\mathring{e}^n_q A^q_l = \bar{g}_{kl} + \mathring{g}_{kl} + \mathring{g}_{kq}A^q_l + \mathring{g}_{pl}A^p_k + \mathring{g}_{pq}A^p_k A^q_l$
ou en groupant différemment les termes :
g_{kl}
$= (\bar{g}_{kl} + \mathring{g}_{pq}A^p_k A^q_l) + (\mathring{g}_{pl}A^p_k)$
$+(\mathring{g}_{kq}A^q_l) + (\mathring{g}_{kl})$
On retrouve la formule précédente :
$g_{kl} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\bar{k}\bar{l}} + \mathring{g}_{\mathring{p}\mathring{q}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}}A^{\mathring{q}}_{\bar{l}} & \mathring{g}_{\mathring{p}\mathring{l}}A^{\mathring{p}}_{\bar{k}} \\ \mathring{g}_{\mathring{k}\mathring{p}}A^{\mathring{p}}_{\bar{l}} & \mathring{g}_{\mathring{k}\mathring{l}} \end{pmatrix}$

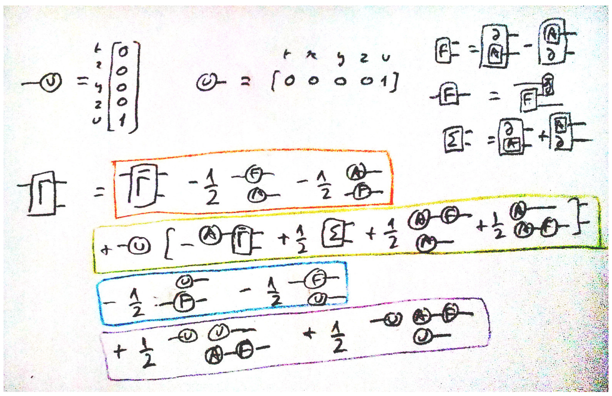
8 Formalisme des tétrades appliqué à l'électromagnétisme : théorie de Kaluza-Klein

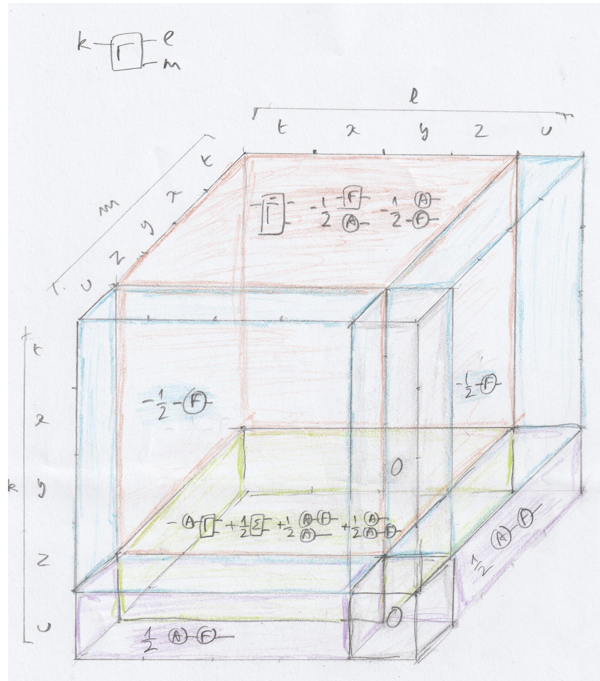
Dans le cas de l'électromagnétisme, il n'y a qu'une dimension compactifiée, l'espace "intérieur" peut être assimilé à un cercle. Le tenseur métrique de cet espace se réduit à un scalaire généralement noté ϕ^2. L'indice contravariant du potentiel vecteur est inutile. Le tenseur métrique de l'espace-temps de Kaluza-Klein est donc :
$g_{kl} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\bar{k}\bar{l}} + \phi^2 A_{\bar{k}}A_{\bar{l}} & \phi^2 A_{\bar{k}} \\ \phi^2 A_{\bar{l}} & \phi^2 \end{pmatrix}$
(voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory`)
Certains auteurs (voir par exemple `http://www.lpt.ups-tlse.fr/IMG/pdf_EA_2.pdf` ou `http://log.chez.com/text/physics/pdf_EA_2.pdf`) considèrent que $\phi^2 = 1$ ce qui donne :
$g_{kl} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{\bar{k}\bar{l}} + A_{\bar{k}}A_{\bar{l}} & A_{\bar{k}} \\ A_{\bar{l}} & 1 \end{pmatrix}$
Les coefficients de connexion affine peuvent être calculés à partir de la métrique par la formule :

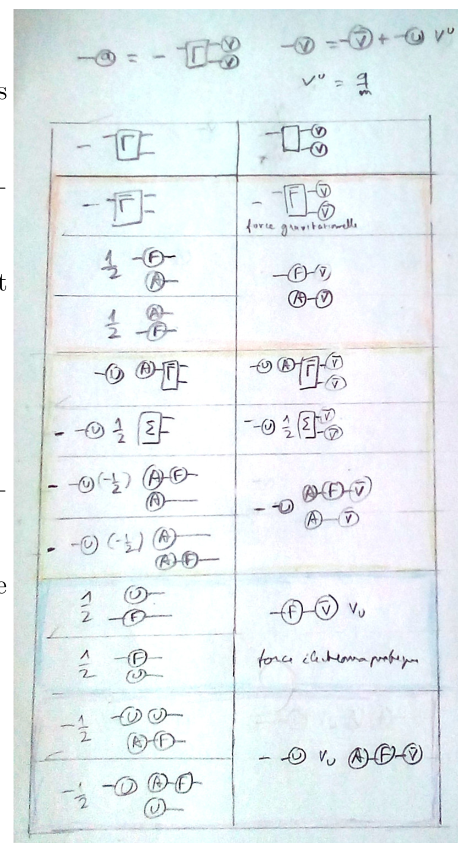
$$\Gamma^k_{lm} = \frac{1}{2}(\partial_l g_{nm} + \partial_m g_{nl} - \partial_n g_{lm})g^{kn}$$

ce qui donne, en désignant le temps par t, les coordonnées spatiales par x, y, z, et la coordonnée compactifiée par u, et en définissant $\Sigma^k_l = \partial_k A_l - \partial_l A_k$:

- $\Gamma^k_{uu} = 0$
- Si $m \neq u$: $\Gamma^u_{um} = \frac{1}{2}A^n F_{nm}$
- Si $k \neq u$ et $m \neq u$: $\Gamma^k_{um} = -\frac{1}{2}F^k_m$
- Si $l \neq u$ et $m \neq u$:
  $\Gamma^u_{lm} = \frac{1}{2}\Sigma_{lm} - A_n\bar{\Gamma}^n_{lm} - \frac{1}{2}A^n(A_l F_{mn} + A_m F_{ln})$
- Si $k \neq u, l \neq u$ et $m \neq u$: $\Gamma^k_{lm} = \bar{\Gamma}^k_{lm} - \frac{1}{2}(A_l F^k_m + A_m F^k_l)$







En posant $U^k = U_k = 0$ si k = t, x, y ou z ; $U^u = U_u = 1$ et en complétant à 5 dimensions avec des coefficients nuls, on peut regrouper ces formules en une somme :

$\Gamma^k_{lm} = \bar{\Gamma}^k_{lm} - \frac{1}{2}F^k_l A_m - \frac{1}{2}F^k_m A_l + U^k(-A_n\bar{\Gamma}^n_{lm} + \frac{1}{2}\Sigma_{lm} + \frac{1}{2}A_n F^n_l A_m + \frac{1}{2}A_l A_n F^n_m) - \frac{1}{2}F^k_m U_l - \frac{1}{2}F^k_l U_m + \frac{1}{2}U^k U_l A_n F^n_m + \frac{1}{2}U^k A_n F^n_l U_m$

L'accélération a^k d'un corps se déplaçant à une vitesse v^k, avec $v^u = U_k v^k = \frac{q}{m}$ où q est la charge du corps et m sa masse, est donnée par la formule :

$$a^k = -\Gamma^k_{lm} v^l v^m$$

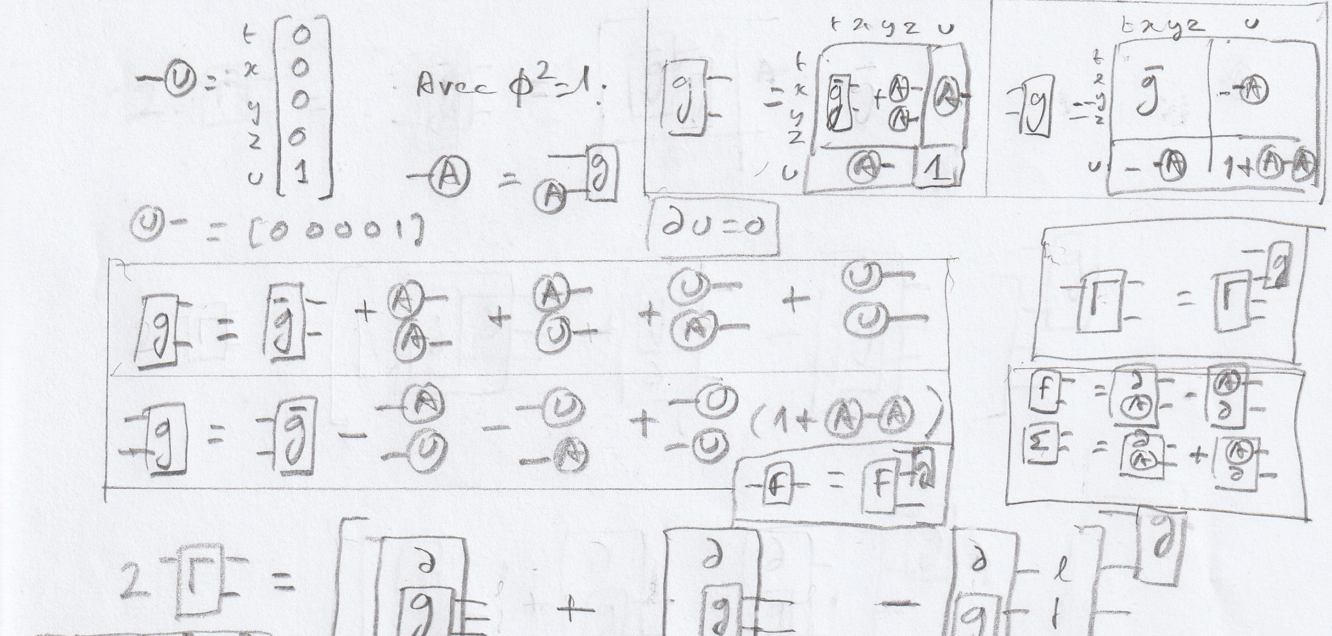
En développant Γ^k_{lm} on obtient :

$a^k = -\bar{\Gamma}^k_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^m + F^k_l\bar{v}^l A_m\bar{v}^m + U^k A_n\bar{\Gamma}^n_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^n - \frac{1}{2}U^k\Sigma_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^m - U^k A_n F^n_l\bar{v}^l A_m\bar{v}^m + \frac{q}{m}F^k_l\bar{v}^l - \frac{q}{m}U^k A_n F^n_l\bar{v}^l$

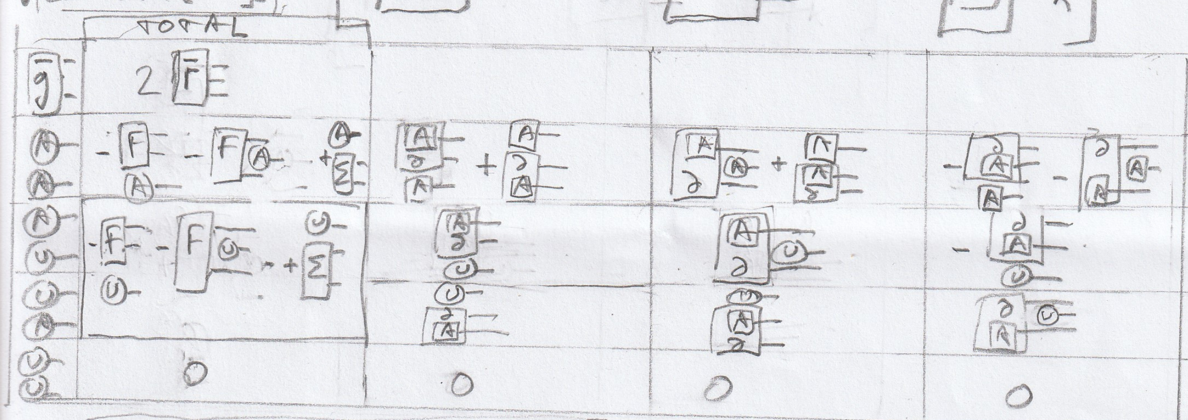
$-\bar{\Gamma}^k_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^m$ correspond à la force gravitationnelle, à laquelle s'ajoute un terme supplémentaire $F^k_l\bar{v}^l A_m\bar{v}^m$.
$\frac{q}{m}F^k_l\bar{v}^l$ correspond à la force électromagnétique.
On a enfin une accélération dans la dimension supplémentaire donnée par la formule :

$$a^u = A_n\bar{\Gamma}^n_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^n - \frac{1}{2}\Sigma_{lm}\bar{v}^l\bar{v}^m - A_n F^n_l\bar{v}^l A_m\bar{v}^m - \frac{q}{m}A_n F^n_l\bar{v}^l$$

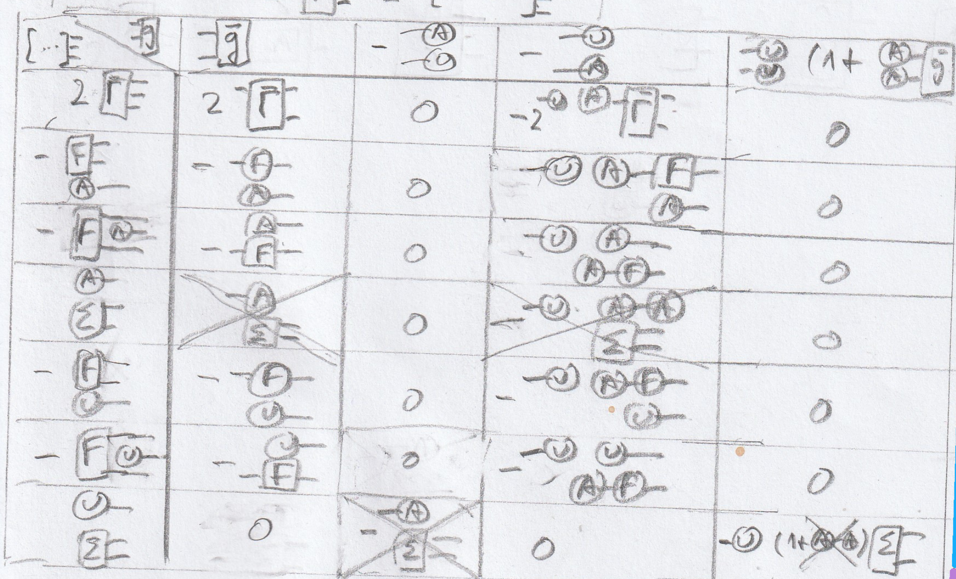
CALCUL DE Γ EN FONCTION DE g et g

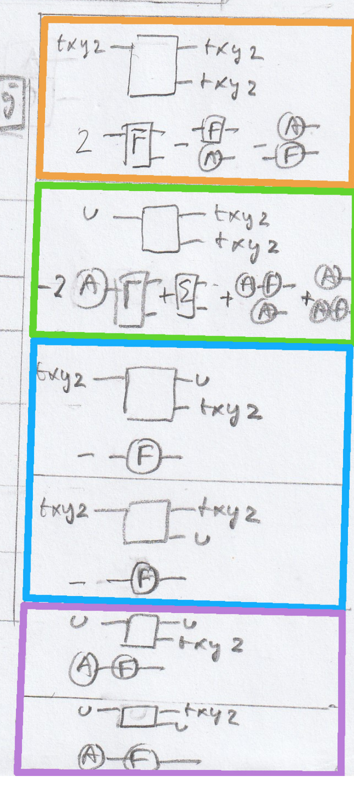


• calcul de [···]



• Calcul de 2 Γ = [···] g





Diviser tout par 2 pour obtenir Γ