Algorithmes à convergence très rapide vers π utilisant les suites moyennes arithmético-géométriques

1 Introduction

Le mathématicien Gauss introduisit et étudia les suites moyennes arithmético-géométriques ainsi définies par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = a & \text{donné} \\ b_0 = b & \text{donné} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} & \end{cases}$$

Elles jouissent de nombreuses propriétés et en particulier si a et b sont positifs, elles convergent toutes les deux vers un même nombre noté $M(a;b)$ à un vitesse vertigineuse.
Cette convergence est précisément quadratique.
Autrement dit le nombre de **chiffres exactes** à la limite **double** à **chaque itérations**.
Voici un exemple avec $a = 2$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned}
a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} &= \mathbf{1},5 \\
b_1 = \sqrt{a_0\, b_0} &= \mathbf{1},4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907\ldots \\
a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} &= \mathbf{1},\mathbf{45}71067811865475244008443621048490392848359376884740365883398689953\ldots \\
b_2 = \sqrt{a_1\, b_1} &= \mathbf{1},\mathbf{45}6475315121970260851161882473252437139769573534745631091887649293 5\ldots \\
a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} &= \mathbf{1},\mathbf{4567910}48154258892626003122289050738212302755611609833840113759144 4\ldots \\
b_3 = \sqrt{a_2\, b_2} &= \mathbf{1},\mathbf{4567910}13939554946194175396981771774774462856248634538080222629345 6\ldots \\
a_4 = \frac{a_3+b_3}{2} &= \mathbf{1},\mathbf{4567910310469069}19410089259635411256493382805930122185960168194245 0\ldots \\
b_4 = \sqrt{a_3\, b_3} &= \mathbf{1},\mathbf{45679103104690 6}818962775506894753559198180770753621365798205383160 6\ldots \\
a_5 = \frac{a_4+b_4}{2} &= \mathbf{1},\mathbf{456791031046906869186432383265 08}240784578178834187177587918678870 28\ldots \\
b_5 = \sqrt{a_4\, b_4} &= \mathbf{1},\mathbf{45679103104690686918643238326508}154210194609810073940570915797783 30\ldots \\
a_6 = \frac{a_5+b_5}{2} &= \mathbf{1},\mathbf{45679103104690686918643238326508197497386394322130559079417238326 7}9\ldots \\
b_6 = \sqrt{a_5\, b_5} &= \mathbf{1},\mathbf{45679103104690686918643238326508197497386394322130559079417238326 7}8\ldots
\end{aligned}$$

Mais Quel lien y a-t-il avec le nombre π ?

En définissant la fonction f par $f(x) = M(1;x)$ on montre que cette fonction est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et surtout la relation :

$$\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Elle permit aux mathématiciens Salamin et Brent puis aux frères Borwein de trouver des suites récurrentes convergeant vers π de manière quadratique dans les années 70 et 80, ce qui fut une grande étape dans le calcul de π. Ce papier se propose de montrer le cheminement pour arriver à ces algorithmes.

1.1 Algorithme de Salamin/Brent (1976)

Théorème 1 *Si* $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
alors

$$U_n = \frac{4a_n^2}{1 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k(a_k^2 - b_k^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

1.2 Algorithmes des frères Borwein (1984)

Théorème 2 *Si* $u_0 = \sqrt{2}$, $v_0 = 0$, $p_0 = 2 + \sqrt{2}$

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}(1 + v_n)}{u_n + v_n}$$

alors

$$p_{n+1} = p_n u_n \frac{1 + u_n}{1 + v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

1.3 Encore les frères Borwein (1987)

Théorème 3 *Si* $y_0 = \sqrt{2}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}$ *et* $f_0 = 2 + \sqrt{2}$

$$y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}}$$

$$z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}$$

alors

$$f_{n+1} = f_n \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

2 Les suites moyennes arithmético-géométriques

2.1 Définition

Soient deux réels positifs ou nuls a et b. On définit par récurrence les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

Ce sont les suites moyennes arithmético-géométriques ou AGM (pour arithmetic-geometric means).

2.2 Propriétés

Lemme 1
1. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante à partir du rang* 1.
2. *La suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante à partir du rang* 1.
3. $\forall n \geqslant 1$ *on a :* $b_n \leqslant a_n$.
4. (a_n) *et* (b_n) *convergent vers un même réel qu'on notera* $M(a;b)$.

En un mot, les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Remarque : si $0 \leqslant b \leqslant a$ alors les trois premiers points sont vrais au rang 0.

Preuve :
Montrons le (3) :
Comme pour tout réel A et B on a $(A-B)^2 \geqslant 0$ on déduit que $AB \leqslant \frac{A^2+B^2}{2}$ (I).
Donc $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ puis $b_1 \leqslant a_1$. Et par une récurrence simple, on montre que $\forall n \geqslant 1$ on a : $b_n \leqslant a_n$.
Montrons le (1) et (2) :
Du (3) on déduit que $\forall n \geqslant 1$ $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$:
c'est-à-dire (a_n) est décroissante à partir du rang 1.
et
$\forall n \geqslant 1$, $b_{n+1} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$: c'est-à-dire (b_n) est croissante à partir du rang 1.
Montrons le (4) :
On a ainsi $\forall n \geqslant 1$: $0 \leqslant b_1 \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant a_1$. La suite (a_n) est décroissante et minorée par b_1 donc d'après une propriété de $\mathbb{R}$, elle est convergente vers un réel qu'on note α. De même (b_n) est croissante et majorée par a_1 donc elle est aussi convergente vers un réel qu'on note β.
En faisant tendre n vers l'infini dans l'expression $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, on trouve : $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$ soit $\alpha = \beta$.
Donc (a_n) et (b_n) ont la même limite qu'on note $M(a;b)$.

■

Proposition 1 *Les suites (a_n) et (b_n) converge de façon quadratique lorsque a et b sont positifs.*

Preuve :
Un calcul simple donne :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{8a_{n+2}}$$

Posons $e_n = a_n - b_n$ l'erreur relative. On a ainsi :

$$e_{n+1} = \frac{{e_n}^2}{8a_{n+2}}$$

Nous savons que (e_n) tend vers 0 et (a_n) vers $M(a;b)$ et donc si b et a sont positifs, $M(a;b)$ le sera aussi et par conséquent :

$$\frac{e_{n+1}}{{e_n}^2} \to \frac{1}{8M(a;b)}$$

ie

$$\frac{e_{n+1}}{{e_n}^2} = O(1)$$

d'où la convergence quadratique.
Numériquement si $e_n \approx 10^{-p}$ alors $e_{n+1} \approx \frac{1}{8M(a;b)} 10^{-2p} \approx 10^{-2p}$

Le nombre de chiffres exactes a environ doublé !

■

2.3 Propriétés de la limite $M(a;b)$

Proposition 2
1. *$M(a;a) = a$.*
2. *$M(a;b) = M(b;a)$.*
3. *Quel que soit $n \geqslant 0$ $M(a_n;b_n) = M(a;b)$ avec les mêmes notations.*

4. *Quel que soit le réel* $k \geqslant 0$ $M(ka;kb) = kM(a;b)$.

5. $M(a;b) = M\left(\frac{a+b}{2}; \sqrt{ab}\right)$.

6. *Quel que soit* $a \geqslant b$ $M(a-b;a+b) = M\left(a;\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

Preuve : laissée au lecteur.

3 Etude de la fonction $x \mapsto M(1;x)$

3.1 Continuité de $x \mapsto M(1;x)$

Considérons les suites de fonctions définies par récurrence pour $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$:

$$\begin{array}{rcl} a_0(x) & = & 1 \\ b_0(x) & = & x \\ a_{n+1}(x) & = & \frac{a_n(x)+b_n(x)}{2} \\ b_{n+1}(x) & = & \sqrt{a_n(x)b_n(x)} \end{array}$$

Un raisonnement par récurrence nous convint qu'elles sont bien définies sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et à partir de $n \geqslant 1$, (a_n) est une suite de fonctions décroissante (b_n) est croissante et quel que soit $x \geqslant 0$, $a_n(x) \to M(1;x)$ et $b_n(x) \to M(1;x)$ (convergence simple de suites de fonctions).
Notons pour la suite

$$f(x) = M(1;x)$$

On a :

$$b_n(x) \leqslant f(x) \leqslant a_n(x)$$

J'énonce une propriété évidente :

Proposition 3 *a_n b_n sont des fonctions continues sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.*

Intéressons-nous plutôt à la propriété de cette section :

Proposition 4 *f est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.*

Preuve : Travaillons sur l'intervalle compact $[\,0\,;\,r\,]$ où $r > 0$ est fixé.
Définissons la suite de fonctions (e_n) par $e_n = a_n - b_n$. e_n est continue et la suite (e_n) est décroissante, convergeant simplement vers 0. D'après le théorème de Dini, on sait donc (e_n) converge uniformément vers 0 sur le compact $[\,0\,;\,r\,]$.
Et comme $0 \leqslant a_n - f \leqslant e_n$ on peut donc dire que (a_n) converge uniformément vers f sur $[\,0\,;\,r\,]$. a_n étant continue, f l'est aussi sur $[\,0\,;\,r\,]$, donc sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ étant donné que r était arbitraire.

■

3.2 Dérivabilité de $x \mapsto M(1;x)$

Pour étudier la dérivabilite de f, on fait une petit détour par la théorie des fonctions elliptiques.
Définissons la fonction I sur $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$ par :

$$I(a;b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

Proposition 5

$$I(a;b) = I\left(\frac{a+b}{2}; \sqrt{ab}\right)$$

Résultat dû à Gauss.
Preuve : Remarquons que :

$$2I(a;b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

qui découle de la parité de l'opérande.
Notons :

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

puis cherchons un changement de variable de la forme $t = \phi(s) = \alpha s - \frac{\beta}{s}$ avec α et β positifs. ϕ est bien dans ce cas une bijection de $]\,0\,;\,+\infty\,[$ vers $\mathbb{R}$.
Posons :

$$Q(s) = \frac{\frac{\alpha+\frac{\beta}{s^2}}{2}}{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \phi(s)^2\right)\left(ab+\phi(s)^2\right)}$$

On a ainsi :

$$I\left(\frac{a+b}{2};\sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+t^2\right)(ab+t^2)}} = \int_0^{+\infty} Q(s)ds$$

On aimerez avoir $q(s) = Q(s)$.
Or $Q(s) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\alpha s^2}$ et $q(s) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{s^2}$ ce qui conduit à prendre $\alpha = \frac{1}{2}$.
De même $Q(0) = \frac{1}{2\beta}$ et $q(0) = \frac{1}{ab}$ donc nécessairement $\beta = \frac{ab}{2}$.
Or si on fait le changement de variable $t = \phi(s) = \frac{s}{2} - \frac{ab}{2s}$ on obtient après calcul ce que l'on recherchait $q(s) = Q(s)$ de façon surprenante.

■

Proposition 6 *$(a,b) \mapsto I(a;b)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$, à valeurs positives.*

Preuve : en effet fixons $r > 0$, alors pour $a \geqslant r$ et $b \geqslant r$ on a :

$$q(t) \leqslant \frac{1}{r^2+t^2} \in L^1([\,0\,;\,+\infty\,[)$$

Donc par le théorème de convergence dominé I est continue sur $[r;+\infty[$ donc sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ aussi.
De même

$$\frac{\partial q}{\partial a}(t) = -q(t)\frac{a}{a^2+t^2}$$

En se restreignant à la bande $0 < r < a < R$ et $b \geqslant r$ on trouve :

$$\mid \frac{\partial q}{\partial a}(t) \mid \leqslant \frac{R}{(a^2+t^2)^2} \in L^1([\,0\,;\,+\infty\,[)$$

donc $\frac{\partial q}{\partial a}$ est $\mathcal{C}^1$ sur la bande (par le théorème de convergence dominé) donc sur $]\,0\,;\,+\infty\,[^2$. Il en est de même de $\frac{\partial q}{\partial b}$.

■

Proposition 7 *1. Pour tout réel $k > 0$, $I(ka;kb) = \frac{1}{k}I(a;b)$.*

2. $I(b;a) = I(a;b)$.

3. $I(1;1) = \frac{\pi}{2}$.

Preuve : on a : $I(1;1) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$. Or $\frac{d}{dx}(\arctan)(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\lim_{+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ d'où le troisième point.

■

Le nombre π commence à apparaître !

Théorème 4 *Pour tout réel positif a et b , on a :*

$$I(a;b)M(a;b) = \frac{\pi}{2}$$

Preuve : On a vu (proposition précédente) que $\forall a > 0$ et $\forall b > 0$ on avait $I(a;b) = I(\frac{a+b}{2}; \sqrt{ab})$ et donc

$$I(a_0;b_0) = I(a_1;b_1) = I(a_2;b_2) = \ldots = I(a_n;b_n).$$

Comme I est continue en $(M(a;b), M(a;b))$, par passage à la limite, on trouve :

$$I(a_0;b_0) = I(M(a;b);Ma(a;b)) = M(a;b)^{-1}\, I(1;1) = M(a;b)^{-1}\, \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat.

■

Définissons la fonction g sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$$g(x) = I(1;x)$$

et rappellons

$$f(x) = M(1;x)$$

Ainsi

$$f(x)\,g(x) = \frac{\pi}{2}$$

Théorème 5 *f est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.*

Preuve : Cela découle de la relation précédente entre f et g et de la propriété 6.

■

3.3 Etude de $x \mapsto M(1;x)$ au voisinage de 0 et $+\infty$

Proposition 8 *Quel que soit $x > 0$:*

1. $g(\frac{1}{x}) = g(x)x$.
2. $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} f(x)$.
3. $g(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.
4. $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{-\pi}{2\ln(x)}$
5. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$

Preuve : les deux premiers points découlent des propositions 2 et 7.
Passons au troisième et écrivons :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} = \underbrace{\int_0^a}_{g_1(x)} + \underbrace{\int_a^{+\infty}}_{g_1(x)}$$

où $a > 0$ est fixé.
Pour $0 \leqslant t \leqslant a$ on a:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant 1$$

puis

$$\frac{h(x)}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant g_1(x) \leqslant h(x)$$

où on a posé

$$h(x) = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = -\ln(x) + \ln(a + \sqrt{x^2+a^2})$$

On écrira $g_1(x) = \Theta(a,x)\, h(x)$ avec $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant \Theta(a,x) \leqslant 1$.
De plus

$$0 < \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t\,\sqrt{(1+t^2)}} = B_a \in \mathbb{R}_+$$

i.e. $g_2(x)$ est bornée par une constante indépendante de $x > 0$
et ainsi

$$\frac{g(x)}{-\ln(x)} = \Theta(a;x) + \frac{\Theta(a;x)\ln(a+\sqrt{x^2+a^2}) + g_2(x)}{-\ln(x)}$$

et par passage à la limite sup/limite inf le deuxième terme tend vers 0. On trouve donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant \liminf_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{-\ln(x)} \leqslant \limsup_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{-\ln(x)} \leqslant 1$$

Ceci étant vrai quel que soit $a > 0$ donc en faisant tendre a vers 0, on trouve bien :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{-\ln(x)} = 1$$

$$g(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Passons au point suivant.
Pour x grand

$$g(x) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x}$$

i.e.

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$$

Ensuite sachant que $f(x)\, g(x) = \frac{\pi}{2}$, on trouve les deux derniers points.

$\blacksquare$

3.4 Une équation différentielle vérifiée par $x \mapsto M(1;x)$ sur $]\,0\,;\,1\,[$

Pour tout la suite de l'exposé, on se resteindra à l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$.
Définissons les suites de fonctions $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \\ d_n &= \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{a_n}{c_n}\right) \end{aligned}$$

Proposition 9 *Quel que soit $n \geqslant 0$:*

1. $M(a_n; c_n) = 2\,M(a_{n+1}; c_{n+1})$.
2. $M(a_0; c_0) = 2^n\, M(a_n; c_n)$.

Preuve : On remarque que :

$$c_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n} = \frac{a_n - b_n}{2}$$

D'après la proposition 2,

$$M(a_n - b_n; a_n + b_n) = M(a_n; \sqrt{a_n^2 - b_n^2})$$

soit

$$M(2c_{n+1}; 2a_{n+1}) = M(a_n; c_n)$$

d'où

$$2M(c_{n+1}; a_{n+1}) = M(a_n; c_n)$$

et par récurrence on trouve le second point.

■

Proposition 10 *Quel que soit $x \in]0;1[$, on a*

$$d_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})} \qquad \textit{(convergence simple)}$$

Preuve : On écrit que

$$f(\sqrt{1-x^2}) = M(1;\sqrt{1-x^2}) = M(a_0;c_0) = 2^n\,M(a_n;c_n) = 2^n a_n M(1;\frac{c_n}{a_n}) = 2^n a_n f(\frac{c_n}{a_n})$$

$a_n(x)$ tend vers $f(x) > 0$ ($x \in]0;1[$) et $\frac{c_n(x)}{a_n(x)}$ tend vers zéro
donc d'après le comportement de f au voisinage de zéro (proposition 8) :

$$f\left(\frac{c_n(x)}{a_n(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln\left(\frac{c_n(x)}{a_n(x)}\right)}$$

Et on déduit le résultat.

■

Voici un résultat important sur la suite (d_n) :

Proposition 11

$$\frac{d'_{n+1}}{d'_n} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{{b_{n+1}}^2}{{b_n}^2}$$

soit

$$\frac{d'_{n+1}}{{b_{n+1}}^2} = \frac{d'_n}{{b_n}^2}$$

Ce qui entraîne

Corollaire 1

$$\begin{aligned}\frac{d_n'(x)}{{b_n}^2(x)} &= \frac{d_0'(x)}{{b_0}^2(x)} = \frac{1}{x(1-x^2)} \\ d_n'(x) &= \frac{b_n(x)^2}{x(1-x^2)} \qquad\qquad \mathit{sur}\ ]0;1[\end{aligned}$$

Ainsi on peut exprimer explicitement $\frac{d_n'(x)}{b_n(x)^2}$ e fonction de x et donc $d_n'(x)$ en fonction de x et $b_n(x)$.

Preuve de la propriété : on calcule d_n' :

$$\begin{aligned}d_n' &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{a_n}{c_n}\right)^{-1}\frac{a_n'c_n - a_nc_n'}{{c_n}^2} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{a_n'}{a_n} - \frac{c_n'}{c_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{a_nb_nb_n' - {b_n}^2a_n'}{a_n({a_n}^2 - {b_n}^2)}\end{aligned}$$

on calcule de même d_{n+1}' en remarquant que :

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$$

et donc

$$c_{n+1}' = \frac{a_n' - b_n'}{2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}d_{n+1}' &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}'}{a_{n+1}} - \frac{c_{n+1}'}{c_{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{a_n' + b_n'}{a_n + b_n} - \frac{a_n' - b_n'}{a_n - b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{a_nb_n' - b_na_n'}{{a_n}^2 - {b_n}^2}\end{aligned}$$

Donc on déduit

$$\frac{d_{n+1}'}{d_n'} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_nb_n}{{b_n}^2} = \frac{{b_{n+1}}^2}{{b_n}^2}$$

$\blacksquare$

Proposition 12 *d_n' converge uniformément sur tout compact de $]0;1[$ vers $x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$*

Preuve : on se rappelle que $0 < b_n(x) \leqslant f(x)$ et considérons un compact K de $]0;1[$. Pour tout x de K, on a :

$$\begin{aligned}\left| d_n'(x) - \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)} \right| &= \left| \frac{b_n(x)^2 - f^2(x)}{x(1-x^2)} \right| \\ &= | b_n(x) - f(x) | \times \left| \frac{b_n(x) + f(x)}{x(1-x^2)} \right| \\ &\leqslant | f(x) - b_n(x) | \times \sup_{y\in K}\left(\frac{2f(y)}{y(1-y^2)}\right)\end{aligned}$$

f étant continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $\sup_{y\in K}\left(\frac{2f(y)}{y(1-y^2)}\right)$ est un nombre positif et puisque b_n converge uniformément sur tout compact de $]0;1[$ vers f, on déduit la propriété.

■

Résumons :

- d_n converge simplment vers $x \overset{l}{\mapsto} \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$
- d'_n converge uniformément vers $\overset{h}{\mapsto} \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ sur tout compact de $]0;1[$.

Donc d'après le théorème sur la limite de fonctions dérivables l est une fonction dérivable sur $]0;1[$ et $l' = h$.
En dérivant l on trouve que f vérifie l'équation sur $]0;1[$:

$$\frac{\pi}{2}\left(x(1-x^2)f'(x)f(\sqrt{1-x^2}) + x^2\sqrt{1-x^2}f(x)f(\sqrt{1-x^2})\right) = f^2(x)f^2(\sqrt{1-x^2})$$

En évaluant l'équation en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient l'égalité reliant f et π :

$$\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Au début de ce papier on a remarqué qu'on peut calculer avec grande précision et rapidement $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et on sait calculer aussi rapidement $\sqrt{2}$ (voir la méthode de Newton).
Maintenant le problème qui se pose est le suivant : peut-on approcher $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ par une suite ayant une convergence quadratique comme les deux nombres précédents ?

Par chance, les suites dérivées a'_n et b'_n ont cette propriété.

4 Justification des algorithmes à convergence quadratique

4.1 Etude des suites (a'_n) et (b'_n) sur $]0;1[$

Rappelons les définitions :

$$\begin{cases} a_0(x) &= 1 \\ b_0(x) &= x \\ a_{n+1}(x) &= \frac{a_n(x)+b_n(x)}{2} \\ b_{n+1}(x) &= \sqrt{a_n(x)b_n(x)} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a'_0(x) &= 0 \\ b'_0(x) &= 1 \\ a'_{n+1}(x) &= \frac{a'_n(x)+b'_n(x)}{2} \\ b'_{n+1}(x) &= \frac{a'_n(x)b_n(x)+a_n(x)b'_n(x)}{2\sqrt{a_n(x)b_n(x)}} \end{cases}$$

Définissons pour $n \geqslant 0$, les deux suites de fonctions sur $]0;1[$:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{a_n}{b_n} \\ z_n &= \frac{b'_n}{a'_n} \end{aligned}$$

qui nous servirons pour l'étude des fonctions a'_n et b'_n et pour exprimer les algorithmes.

Proposition 13 *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

1. $y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}}$,
2. $z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$,
3. $y_n \geqslant 1$,
4. $z_n \geqslant 1$,
5. $z_n \geqslant y_n$,
6. (z_n) *est une suite décroissante.*
7. (y_n) *et* (z_n) *convergent uniformément sur tout compact de* $]0;1[$ *vers* 1.

Preuve : les deux premiers points résultent des relations de récurrence précédentes entre a'_{n+1}, b'_{n+1} et a'_n, b'_n.

nous savons déjà que $a_n \geqslant b_n > 0$ d'où $y_n \geqslant 1$.
Remarquons ensuite que $z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $z_1 \geqslant 1$ sur $]0;1[$.
Définissons la fonction ϕ_y par

$$\phi_y(x) = \frac{1+yx}{(1+x)\sqrt{y}}$$

alors

$$\phi'_y(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y-1}{(1+x)^2}$$

donc si $y \geqslant 1$, alors $\phi'_y \geqslant 0$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et comme $\phi_y(1) = \frac{1+y}{2\sqrt{y}} \geqslant 1$, on déduit que si $z_n \geqslant 1$ alors $z_{n+1} = \phi_{y_n}(z_n) \geqslant \phi_{y_n}(1) \geqslant 1$ c'est-à-dire

$$z_{n+1} \geqslant y_{n+1} \geqslant 1.$$

Or $z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 1$ et $y_1(x) = \frac{1}{x} \geqslant 1$, donc on a bien $z_n \geqslant y_n$ à partir de $n = 1$ (par récurrence).

La monotonie de (z_n) se déduit facilement :

$$z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}} \leqslant \frac{z_n + y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$$

donc

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \leqslant \frac{1+y_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{y_n}} \leqslant 1$$

Etudions la convergence des deux suites.
Nous avons

$$y_n - 1 = \frac{a_n - b_n}{b_n} \leqslant \frac{a_n - b_n}{b_0}$$

du fait de la croissance de la suite (b_n), d'où pour tout x d'un compact K de $]0;1[$:

$$y_n(x) - 1 \leqslant \sup_{y \in K} \left(\frac{1}{y}\right) (a_n(x) - b_n(x))$$

Et comme $(a_n - b_n)$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $[\,0\,;+\infty\,[$, on déduit que (y_n) tend vers 1 uniformément sur tout compact de $]0;1[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$, $(z_n(x))$ est une suite décroissante minorée par 1 donc elle converge et comme $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, on déduit de l'expression de récurrence $z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$ que $z_n(x)$ tend vers 1.
Ensuite les fonctions z_n étant continues comme $x \mapsto 1$ et la suite (z_n) étant décroissante, on conclut grâce au théorème de Dini que (z_n) converge en fait uniformément sur tout compact de $]0;1[$ vers 1.

■

Proposition 14 *les suites* (a'_n) *et* (b'_n) *converge uniformément sur tout compact de* $]0;1[$ *vers* f' *de façon quadratique.*

Preuve : commençons par préciser quelques notations. On note :
$\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$
et pour une fonction sur un compact K de $]0;1[$,
$|f|_{K,\infty} = \sup_{y\in K}|f(y)|$.

Définissons $u_n = \|(|z_n-1|_{K,\infty}, |y_n-1|_{K,\infty})\|_\infty$

Commençons par prouver que (a'_n) est bornée pour la norme $|\quad|_{K,\infty}$.
Puisque $a'_{n+1} = \frac{a'_n+b'_n}{2}$, on a $a'_{n+1} = \frac{1+z_n}{2}a'_n$.
Etudions la suite (z_n).
On peut écrire

$$z_{n+1} = G(y_n, z_n)$$

$$y_{n+1} = H(y_n)$$

avec

$$G(y,z) = \frac{1+yz}{(1+z)\sqrt{y}}.$$

$$H(y) = \frac{1+y}{2\sqrt{y}}$$

Puis prenons le développement limité de G et H au voisinage de $(1;1)$:

$$G(1+h, 1+k) = 1 + \frac{h^2}{8} + \frac{hk}{4} + o(\|(h;k)\|_\infty^2)$$

$$H(1+h) = 1 + \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

Donc on peut trouver un réel r, $1 > r > 0$ tel que $|h| \leqslant r$ et $|k| \leqslant r$ entraîne

$$|G(1+h,1+k) - 1| \leqslant \|(h,k)\|_\infty^2$$

$$|H(1+h) - 1| \leqslant h^2 \leqslant \|(h,k)\|_\infty^2$$

Puisque (y_n) et (z_n) converge uniformément sur tout compact de $]0;1[$ vers 1, pour tout K compact de $]0;1[$ il existe un entier $N_{K,r}$ positif, tel que pour tout $n \geqslant N_{K,r}$, on ait $|y_n - 1|_{\infty,K} \leqslant r$ et $|z_n - 1|_{\infty,K} \leqslant r$ donc pour tout x de K :

$$|z_{n+1}(x) - 1| \leqslant \|(z_n(x)-1, y_n(x)-1)\|_\infty^2 \leqslant \|(|y_n-1|_{\infty,K}; |z_n-1|_{\infty,K})\|_\infty{}^2$$

et ainsi

$$\|z_{n+1} - 1\|_{\infty,K} \leqslant \|(\|y_n-1\|_{\infty,K}; \|z_n-1\|_{\infty,K})\|_\infty{}^2$$

et en procédent de même pour y_n, on a :

$$|y_{n+1} - 1|_{\infty,K} \leqslant \|(|y_n-1|_{\infty,K}; |z_n-1|_{\infty,K})\|_\infty{}^2$$

i.e. pour $n \geqslant N_{K,r}$

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2$$

d'où par récurrence

$$u_n \leqslant c\, r^{2^n}$$

avec $c = r^{2^{-N_{K,r}}}$

Comme

$$|a'_{n+1}|_{K,\infty} \leqslant \frac{1+|z_n|_{K,\infty}}{2}|a'_n|_{K,\infty}$$

on a pour $n \geqslant N_{K,r}$

$$|a'_{n+1}|_{K,\infty} \leqslant (1+c_2 r^{2^n})|a'_n|_{K,\infty}$$

et ainsi

$$|a'_n|_{K,\infty} \leqslant |a'_{N_{K,r}}|_{K,\infty} \prod_{k=1}^{n-1}(1+c_2 r^{2^k}) \leqslant |a'_{N_{K,r}}|_{K,\infty} \prod_{k=1}^{\infty}(1+c_2 r^{2^k}) \in \mathbb{R}_+$$

La suite (a'_n) est donc bien bornée et puis elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur K car $a'_{n+1}-a'_n = \frac{b'_n-a'_n}{2} = \frac{z_n-1}{2}a'_n$ et donc si $n \geqslant N_{K,r}$

$$|a'_{n+1}-a'_n|_{K,\infty} \leqslant c_3\, r^{2^n}$$

car (a'_n) est bornée. En conséquence pour $m \geqslant n \geqslant N_{K,r}$

$$|a'_m - a'_n|_{K,\infty} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}|a'_{k+1}-a'_k|_{K,\infty} \leqslant c_3 \sum_{k=n}^{m-1} r^{2^k} \leqslant c_3 \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \in \mathbb{R}_+$$

et puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty} r^{2^k}$ converge, quel que soit $\epsilon > 0$

$$|a'_m - a'_n|_{K,\infty} \leqslant \epsilon$$

pour n assez grand. (a'_n) est donc une suite qui converge uniformément sur K vers une fonction continue J et comme (a_n) converge simplement vers f sur K, on peut donc affirmer que (a'_n) converge en fait vers f' sur K.
Et de la relation $a'_{n+1} = \frac{a'_n+b'_n}{2}$, on tire que (b'_n) converge aussi uniformément sur K vers f'.

Enfin puisque

$$|a'_m - a'_n|_{K,\infty} \leqslant c_3 \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k}$$

on tire par passage à la limite $m \to +\infty$:

$$|f' - a'_n|_{K,\infty} \leqslant c_3 \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \leqslant r^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \leqslant \frac{r^{2^n}}{1-r}$$

d'où la convergence quadratique de a'_n vers f' et à fortiori de b'_n.

$\blacksquare$

4.2 Retour sur le dernier algorithme des frères Borwein

4.2.1 Explication détaillée

Rapellons les suites :
Si $y_0 = \sqrt{2}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}$ et $f_0 = 2+\sqrt{2}$

$$y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}}$$

$$z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$$

alors

$$f_{n+1} = f_n \frac{1+y_n}{1+z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

Preuve : Les suites numériques (y_n) et (z_n) sont en fait les suites $(y_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))$ et $(z_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))$ de la section précédente. Définissons la suite de fonctions (w_n) :

$$w_n = \frac{a_n b_n^2}{a_n'}$$

Nous savons d'après l'étude précédente que

$$w_n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

D'après la formule

$$\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Or un calcul montre que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1+y_n}{1+z_n}$$

et

$$w_1(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc on peut calculer par récurrence la suite numérique $w_n(\frac{1}{\sqrt{2}})$
et en définissant $f_n = 2\sqrt{2}w_n$, on retrouve la suite du théorème.

■

4.2.2 Premier algorithme

4.3 Explication du premier algorithme des frères Borwein

Rapellons les suites :
si $u_0 = \sqrt{2}$, $v_0 = 0$, $p_0 = 2 + \sqrt{2}$

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}(1+v_n)}{u_n + v_n}$$

alors

$$p_{n+1} = p_n u_n \frac{1+u_n}{1+v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

Preuve : C'est en fait l'algorithme précédent en posant $v_n = \frac{1}{z_n}$ et $u_n = y_n$ et on vérifie que si on peut pose $v_0 = 0$, on retrouvera $v_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

■

4.4 Retour sur le dernier algorithme Brent et Salamin

4.4.1 Explication détaillée

Ils ont découvert cet algorithme en même temps et indépendamment.
Rapellons les suites :
si $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
alors

$$U_n = \frac{4a_n^2}{1 - 2\sum_{k=1}^{n} 2^k(a_k^2 - b_k^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

Preuve :
comme vous l'avez remarqué, les suites numériques (a_n) et (b_n) sont en fait les suites $(a_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))$ et $(b_n(\frac{1}{\sqrt{2}}))$ des sections précédentes. Il nous reste à voir que :

$$U_n = 2\sqrt{2}\frac{a_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)b_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{b'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

puis on en conclura

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

D'après les formules de récurrence de a_n, b_n, a'_n et b'_n, on a :

$$\frac{b'_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a'_n}{a_n} + \frac{b'_n}{b_n}\right)$$

donc

$$\frac{b'_n}{b_n} - \frac{b'_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b'_n}{b_n} - \frac{a'_n}{a_n}\right)$$

Et nous avons vu (proposition 11) que

$$d'_n(x) = \frac{b_n^2(x)}{x(1-x^2)}$$

ainsi que

$$d'_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{b'_n - b_n\frac{a'_n}{a_n}}{{a_n}^2 - {b_n}^2}$$

donc on tire

$$\frac{b'_n}{b_n} - \frac{b'_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2^n\left({a_n}^2 - {b_n}^2\right)}{2x(1-x^2)}$$

et par récurrence

$$\frac{b'_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x(1-x^2)}\sum_{k=1}^{n} 2^k\left(a_k^2 - b_k^2\right).$$

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on trouve

$$\sqrt{2}\frac{b'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{b_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1 - 2\sum_{k=1}^{n} 2^k\left(a_k^2 - b_k^2\right)$$

Par conséquent

$$U_n = \frac{4a_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k\left(a_k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - b_k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)} = 2\sqrt{2}\frac{a_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)b_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{b'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

■

4.4.2 Premier algorithme

On écrit :

$$U_n = \frac{4a_n^2}{1 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k(a_k^2 - b_k^2)} = \frac{a_n^2}{\frac{1}{4} - \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1}(a_k^2 - b_k^2)}$$

puis on considère les variables :

$$\begin{aligned} A_n &= a_n^2 \\ B_n &= b_n^2 \\ S_n &= \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(a_k^2 - b_k^2) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A_0 = 1$$

$$B_0 = \frac{1}{2}$$

$$S_0 = \frac{1}{4}$$

et les formules :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sqrt{A_n B_n} \\ A_{n+1} &= \frac{A_n + B_n}{4} + \frac{B_{n+1}}{2} \\ S_{n+1} &= S_n - 2^n(A_{n+1} - B_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui donne l'algorithme :

$A \leftarrow 1$
$B \leftarrow 1 \div 2$
$S \leftarrow 1 \div 4$

répéter pour n variant de 0 à N
$t \leftarrow AB$
$t \leftarrow \sqrt{t}$
$A \leftarrow A + B$
$A \leftarrow \div 4$
$A \leftarrow A + t$
$t \leftarrow A - B$
$t \leftarrow 2^k t$
$S \leftarrow S - t$
fin de la boucle

$t \leftarrow A \div S$
afficher $t \approx \pi$

4.4.3 Deuxime algorithme

Cette amélioration est dûe à Arnold Schönhage en 1994.
Elle évite une multiplication (ce qui demande beaucoup de calcul) pour un carré (ce qui en demande moins). Puisque

$$A_{n+1} = \frac{A_n + B_n}{4} + \frac{B_{n+1}}{2}$$

on déduit que

$$B_{n+1} = 2A_{n+1} - \frac{A_n + B_n}{2}$$

et on utilise les suites a_n, A_n, B_n et $s_n = 2S_n$.
Voici l'algorithme :

$a \leftarrow 1$
$A \leftarrow 1$
$B \leftarrow 1 \div 2$
$s \leftarrow 1 \div 2$

répéter pour n variant de 0 à $N-1$
$t \leftarrow A + B$
$t \leftarrow t \div 4$
$B \leftarrow \sqrt{B}$
$a \leftarrow a + B$
$a \leftarrow a \div 2$
$A \leftarrow a^2$
$B \leftarrow A - t$
$B \leftarrow 2 \times B$
$t \leftarrow A - B$
$t \leftarrow 2^{k+1} t$
$s \leftarrow s - t$
fin de la boucle

$A \leftarrow A + B$
$t \leftarrow A \div s$
afficher $t \approx \pi$