Optique pour la gemmologie

Formules pour calculer
les angles de pavillon et de couronne
lors de la taille d'une pierre gemme

Site internet: http://perso.wanadoo.fr/physique/gemmologie

Auteur : Yves Brenner – yves.brenner@laposte.net

02/11/2003

Choix des angles du pavillon P et de la couronne C lors de la taille d'une pierre gemme.

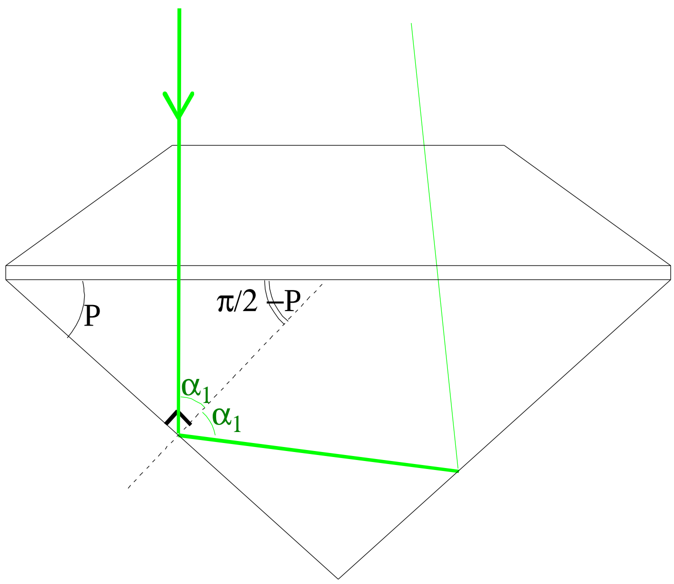
Rappels de notation :

n indice de refraction
AC angle critique de réflexion
C angle de la couronne
P angle du pavillon
Un cristal d'indice *n* a pour angle critique de réflexion totale AC= arcsin(1/n)
Objectifs: L'objectif est d'étudier les conditions sur les angles C et P qui permettent de faire ressortir les rayons lumineux de la pierre, afin de « l'éclairer de l'intérieur ».

Condition sur l'angle du pavillon P

Première réflexion

On imagine un rayon entrant perpendiculairement à la table, tel que sur la figure :



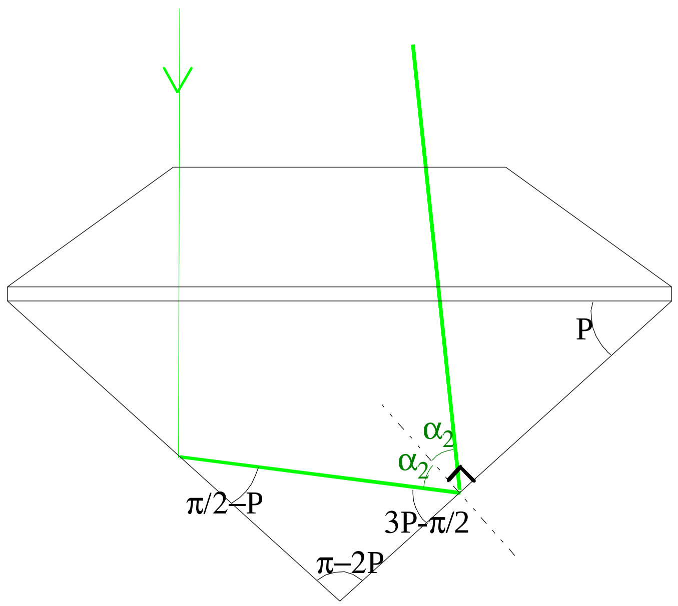
Le rayon entrant perpendiculairement à la table n'est pas dévié en entrant dans le cristal. Il arrive sur la face inférieure du pavillon avec un angle $\alpha1$; la condition de réflexion est $\alpha1$ > AC et avec les relations angulaires dans le triangle, $\alpha1$ = P

On a donc : $\boxed{P > AC}$

Après cela, le rayon s'écarte de la face avec un angle de réflexion par rapport à la normale lui aussi égal à $\alpha1$. Il arrive sur la deuxième face du pavillon.

- Pour le quartz, n=1,544, soit AC= 40,36°. On a P> 40,36°.
- Pour le saphir, n=1,762, soit AC= 34,58°. On a P> 34,58°.
- Pour le zircon, n=1,875, soit AC= 32,23°. On a P> 32,23°.
- Pour le diamant, n=2,417, soit AC=24,44°. On a P>24,44°.

Deuxième réflexion



L'angle $\alpha2$ doit être inférieur à l'angle critique pour qu'il y ait réflexion, soit $\alpha2$ < AC .

L'étude des relations entre les angles dans les différents triangles permet d'obtenir la relation

$\alpha2=\pi-3P$, qui conduit donc à π - 3P > AC, soit P < (π – AC)/3

et la relation avec les angles en degrés s 'écrit: $\boxed{P < (180°-AC)/3}$

Les deux relations donnent donc : $\boxed{AC < P < (180°-AC)/3}$

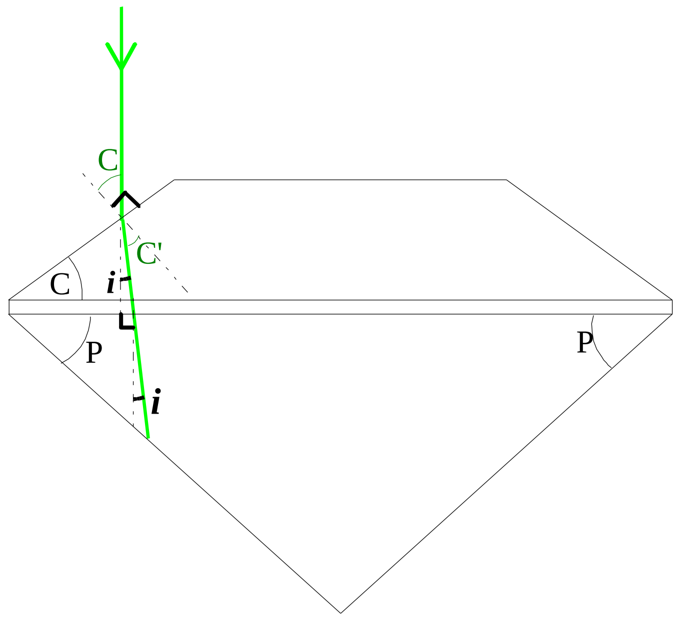
- Pour le quartz: 40,36° < P < 46,55°.
- Pour le saphir : 34,58° < P < 48,47°.
- Pour le zircon : 32,23° < P < 49,26°.
- Pour le diamant: 24,44°< P < 51,85°

On observe que plus l'indice optique de la pierre est élevé, plus on peut faire varier l'angle P.

Conditions sur l'angle de couronne C et de pavillon P.

Pour qu'une reflexion ait lieu lorsqu'un rayon lumineux entre par la couronne, il faut tenir compte des angles de couronne et de pavillon.

Rayon entrant par la couronne



En fait on va ajouter un angle i aux formules précédentes, correspondant à la déviation du rayon lumineux par rapport à la perpendiculaire. Cette déviation est due à la couronne, ainsi qu'on le voit sur la figure.

L'angle du rayon arrivant fait, par construction, un angle C avec la normale de la face d'entrée. Il est alors refracté dans la pierre avec un angle C' tel que :

sin C = n x sin C' , soit sin C' = 1/n x sin C et donc C' = arcsin { 1/n x sin C }

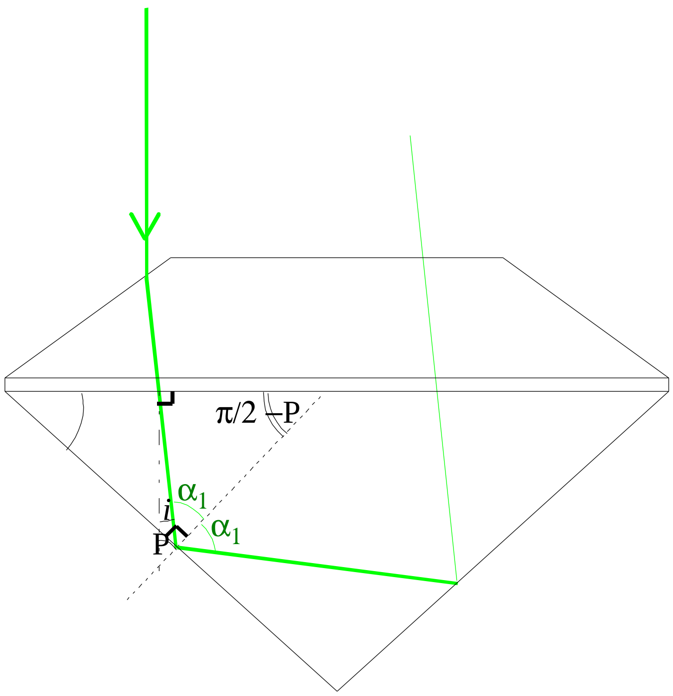
(La fonction arcsin est la fonction inverse de la fonction sin, notée $\sin^{-1}$ sur les calculatrices)

Le petit angle i correspond à la déviation du rayon due à la couronne par rapport à la situation ou le rayon entre directement par la table. Il va être pris en compte pour les formules précédentes.

On a *i*= C – C' , soit : $\boxed{i = C - \arcsin \{ 1/n \times \sin C \}}$

- Pour le quartz, avec C=28° *i* = 10,29°
- Pour le saphir, avec C=33° *i* = 14,99°
- Pour le zircon avec C=33°, *i* = 16,11°
- Pour le diamant, avec C=33°, *i* =19,98

Première réflexion



L'angle $\alpha1$ est modifié tel que: $\alpha1 = i + P$, et la condition est toujours $\alpha1 < AC$

Soit : $i + P > AC$ ou $P > AC - i$

ou encore : $\boxed{P > AC - C + \arcsin\{1/n \times \sin C\}}$

Pour le quartz , avec un angle de couronne C=28°: P > 27,78° .On constate que cette condition théorique n'a aucun intérêt car elle est insuffisante.

Deuxième réflexion

De même l' angle $\alpha2$ est tel que $\alpha2 = \pi-3P-i$, qui conduit donc à $\pi - 3P - i > AC$,

soit $P < (\pi - i - AC)/3$

ou en degrés : $\boxed{P < (180° - i - AC)/3}$ ou encore $\boxed{P < (180° - C + \arcsin(1/n \times \sin C) - AC)/3}$

- Pour le quartz, avec C=28° , P< 43,12°
- Pour le saphir, avec C=33°, P< 43,47°
- Pour le zircon avec C=33°, P< 43.89°
- Pour le diamant, avec C=33°, P<45,19°

Angle à la sortie

Quelle est l'angle à la sortie du rayon lumineux ? Il y a deux possibiltés; soit le rayon sort par la table, soit il sort par la couronne.

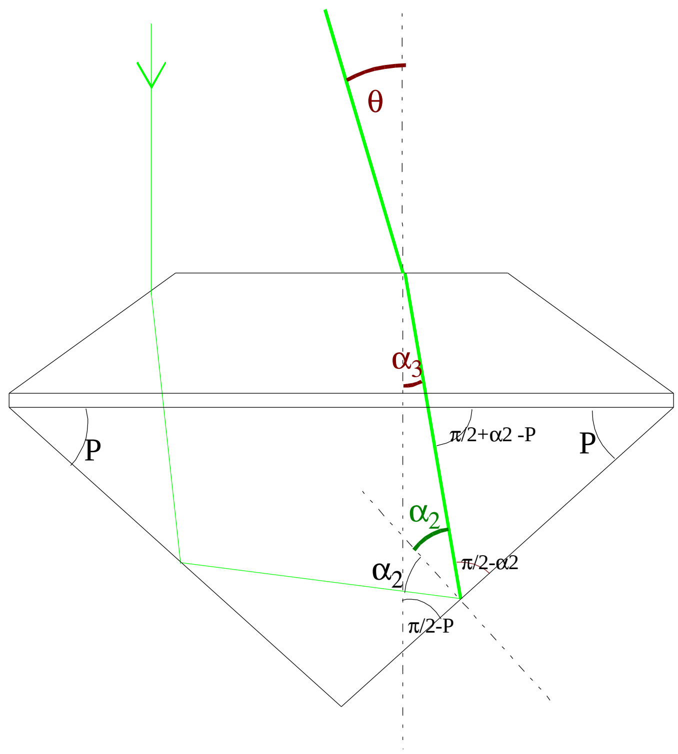
Rayon sortant par la table

Après la deuxième réflexion d'angle $\alpha 2 = \pi - 3P - i$, le rayon ressort par la table. Appelons $\alpha 3$ l'angle à la normale de la table dans le cristal et θ l'angle de sortie.

Avec les relations dans les différents triangle, on a : $\alpha 3 + \alpha 2 - P = 0$, soit $\alpha 3 = P - \alpha 2 = 4P + i - \pi$.

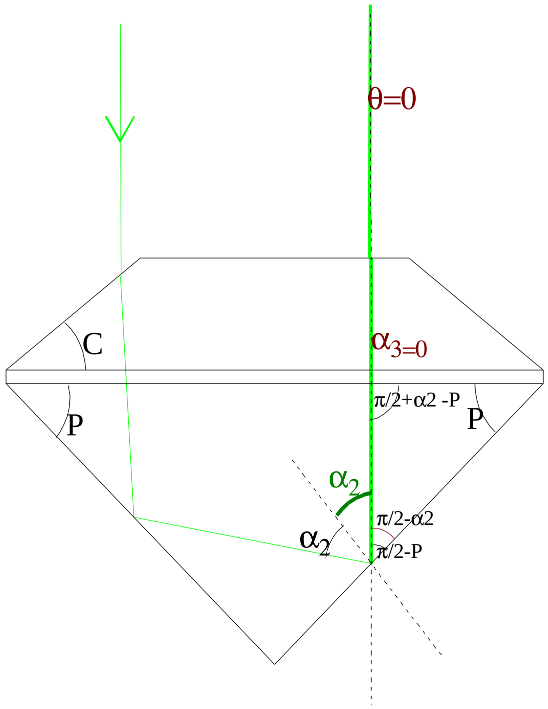
On calcule alors θ: $\sin \theta = n \times \sin \alpha 3$

soit: $\theta = \arcsin \{n \times \sin (4P + i - \pi)\}$



Rayon sortant perpendiculaire

Le rayon vient frapper l'oeil de l'observateur, lorsqu'il est perpendiculaire à la table, soit $\theta = 0$, et donc $\alpha 3=0$ soit $4P+i - \pi=0$; on est dans la situation de la figure suivante.



Ceci permet de calculer une correspondance entre P et C pour que les rayons entrant par la couronne ressortent perpendiculairement par la table :

$P =(\pi - i) /4 =\{ \pi - C + \arcsin (1/n \times \sin C) \} /4$

et en degrés : $\boxed{P = \{ 180° - C + \arcsin (1/n \times \sin C) \} /4}$

Pour le quartz, avec C=28°: P=42,43° correspond à l'angle optimum.

Pour le saphir, avec C=33°, P=41,25°correspond à l'angle optimum.

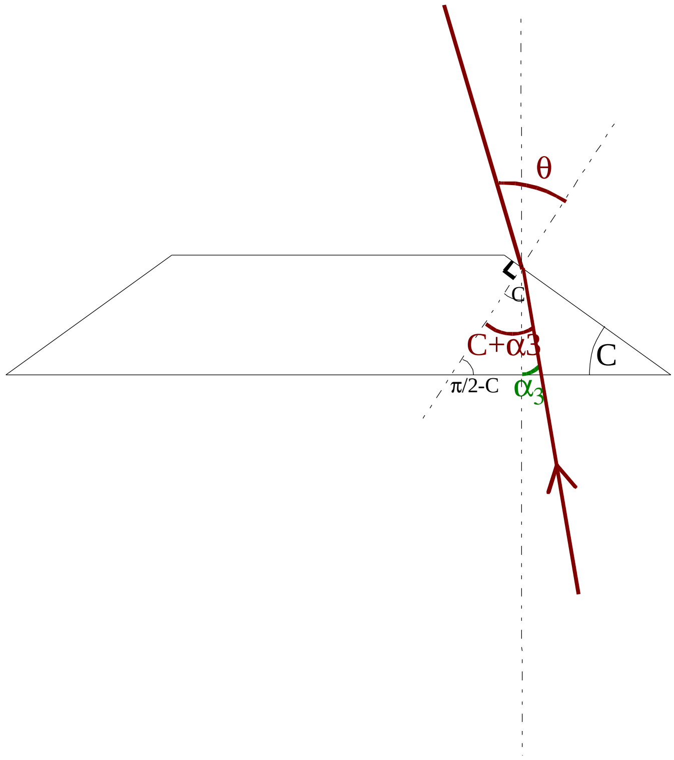
Pour le zircon, avec C=33°, P=40,97°correspond à l'angle optimum.

Pour le diamant avec C=33°, P=40,01°correspond à l'angle optimum.

Rayon sortant par la couronne

Ici, on a le même angle $\alpha 3$, mais qui rencontre la couronne.

Ainsi, l'angle à la normale de la face est $C+\alpha 3$.



On a : $\sin \theta = n \times \sin (C+\alpha 3)$, soit: $\sin \theta = n \times \sin \{C + 4P + i - 180°\}$

Le rayon va dans les yeux de l'observateur pour θ égal à C

et $\theta = C$ signifie $\sin C = n \times \sin \{C+4P+C-\arcsin(1/n \times \sin C) - 180°\}$.

Il est impossible d'obtenir une solution littérale (exacte) à partir de cette équation. Il faut se contentner d'approcher les solutions par n algorithme numérique.

Pour le quartz, avec C=34 °, on obtient P= 38,5 °, ce qui est une condition ne permettant pas la réflexion ! On voit que cette équation théorique (compliquée) n'a aucun intérêt. Ceci signifie tout simplement que les rayons issus de la couronne ne sorten pas perpendiculaire à la table comme on l'a supposé.

Conclusion

Condition impérative

Pour qu'il y ait reflexion des rayons entrant perpendiculairement , il faut que le pavillon P soit tel que :

$$\boxed{AC < P < (180° - i - AC)/3}$$

avec i = C - arcsin { 1/n x sin C }, l'angle introduit par la couronne .

On considère i=0 avec cette même formule pour un rayon entrant par la table.

Condition optimum

Pour que les rayons soient renvoyés dans l'oeil de l'observateur, on a une condition sur les « meilleurs angles » de P et C :

$$\boxed{P = \{ 180° - C + \arcsin (1/n \times \sin C) \} /4}$$

Cette formule est la plus importante car elle fournit les « bonnes » valeurs.

Table des matières

Condition sur l'angle du pavillon P....................2
Première réflexion....................2
Deuxième réflexion....................3
Conditions sur l'angle de couronne C et de pavillon P....................4
Rayon entrant par la couronne....................4
Première réflexion....................5
Deuxième réflexion 5
Angle à la sortie....................6
Rayon sortant par la table....................6
Rayon sortant perpendiculaire....................7
Rayon sortant par la couronne....................8
Conclusion....................9
Condition impérative....................9
Condition optimum....................9